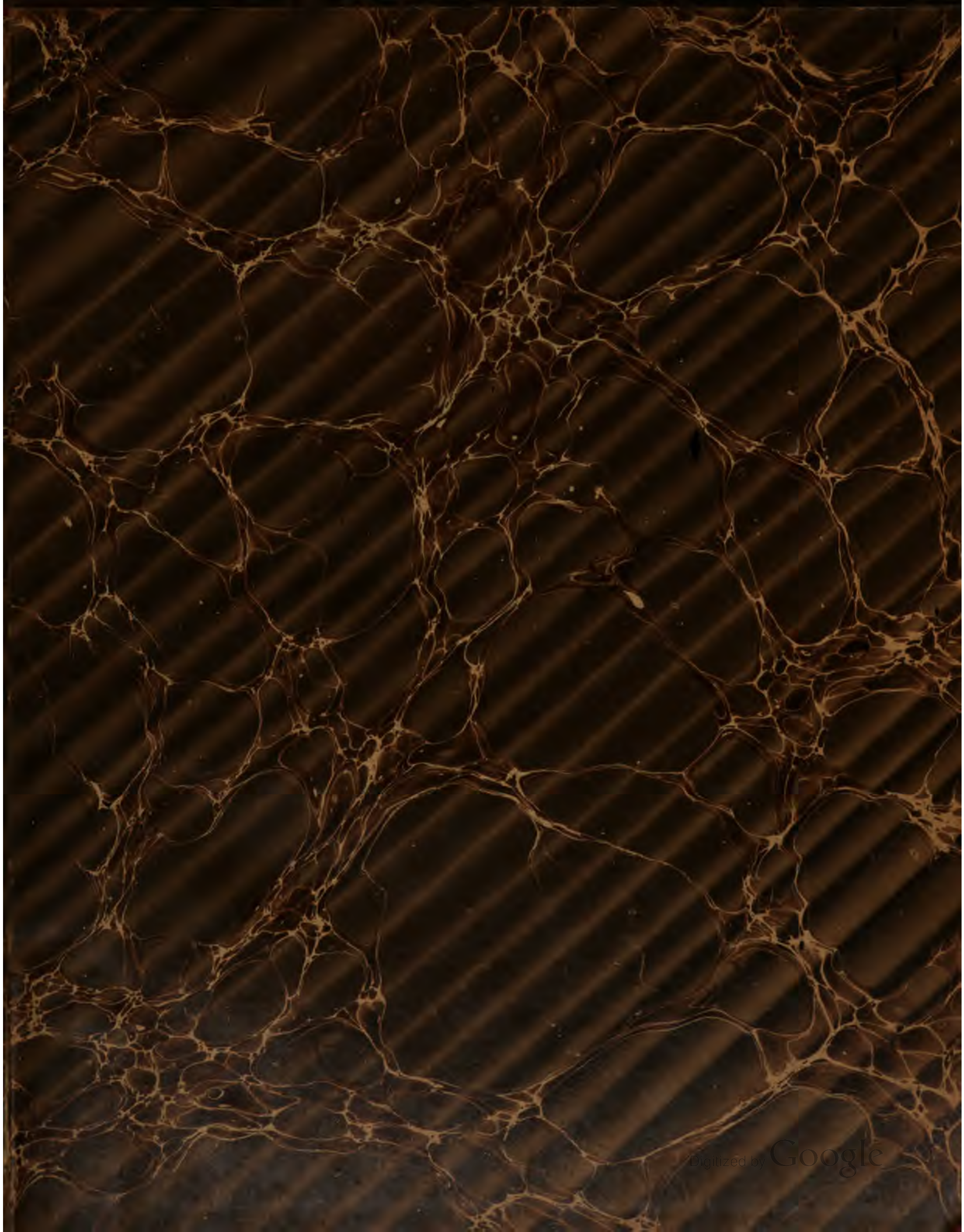




SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



LES

LOIS DE LA MATIÈRE.

ESSAIS DE MÉCANIQUE MOLÉCULAIRE.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

Recherches mathématiques sur les lois fondamentales du monde physique. In-8; Gauthier-Villars, 1865.. 1 fr. 50

C'est une première recherche d'une méthode de calcul appropriée aux corps discontinus et son application à l'explication des forces élastiques par des actions à distance. L'auteur emploie les rangées de molécules, mais sans en tirer un parti avantageux, et établit que les actions moléculaires doivent être en raison inverse de la puissance quatrième de la distance ou d'une puissance plus grande.

Recherches mathématiques sur les lois de la matière. In-4; Gauthier-Villars, 1868. 9 fr.

Cet Ouvrage débute par une réfutation de l'*Unité des forces physiques* du P. Secchi; suivent un exposé des lois d'action à distance qu'il s'agit d'étudier, une étude plus approfondie des rangées de molécules d'où découle la théorie des assemblages réguliers (l'auteur ignorait alors les travaux de Gauss et de Bravais), l'application de cette théorie au calcul des actions dans les milieux discontinus et une évaluation des forces élastiques. On en conclut que les termes de l'action moléculaire sont en raison inverse d'une puissance de la distance au moins égale à 4, et que la pression est proportionnelle à la densité.

9009 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

LES

LOIS DE LA MATIÈRE.

ESSAIS

DE

MÉCANIQUE MOLÉCULAIRE,

PAR

L.-J.-A. DE COMMINES DE MARSILLY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1884

PRÉFACE.

Sous le titre de : *Les lois de la matière, Essais de Mécanique moléculaire*, je publie la synthèse mathématique d'une explication des phénomènes matériels par l'hypothèse des forces centrales. Telle qu'elle est, cette synthèse est le fruit de longues études des divers systèmes préconisés jusqu'à ce jour pour la même explication, de bien des tentatives différentes et plus ou moins heureuses, de longs calculs numériques et analytiques entièrement supprimés ici. Mais, par l'effet même de ces suppressions, l'étendue de cette synthèse paraît bien disproportionnée au temps que j'ai mis à l'établir (vingt-quatre ans environ), car je n'embrasse que les forces élastiques développées à l'intérieur des corps. Je ne me dissimule pas la petitesse du résultat, et j'aurais désiré y ajouter de plus amples développements avant de le faire connaître aux géomètres; quelques années me suffiraient sans doute, car je suis plus maître des faits qu'au début; je les comprends mieux et j'en tire plus aisément les conséquences. Mais je suis arrivé à un âge où il est imprudent de compter sur un avenir de quelque durée; en voyant mes contemporains disparaître les uns après les autres, je me demande si mon tour n'arrivera pas bientôt et si, en retardant la publication de mon travail, je ne l'enterrerais pas avec moi. Dès à présent, il me semble pouvoir fixer l'attention de quelque géomètre curieux de ces sortes de questions dont on s'occupe beaucoup à notre époque, et lui servir de jalon dans une voie féconde à coup sûr, vraie probablement. J'en ai donc jugé la publication utile.

Mon travail est divisé en cinq Sections :

I. Dans la première, j'expose l'hypothèse qui est celle des attractionnaires, tels que Cauchy, Lamé et M. de Saint-Venant. Si elle renferme quelque chose de nouveau (et encore?), c'est la supposition que les capacités pour les attractions et répulsions en raison inverse de di-

verses puissances de la distance ne sont pas toutes les mêmes dans le même atome. Je traduis en formules ces forces centrales, et, de leur examen, je conclus que les molécules d'un milieu ne peuvent pas être distribuées d'une manière quelconque, mais doivent l'être dans un certain ordre, dont le plus simple est l'assemblage, tel que Bravais l'a défini dans un Mémoire présenté en 1848 à l'Académie des Sciences. Dès que les molécules d'un corps peuvent se rattacher par une série continue de déplacements à un état antérieur où elles étaient régulièrement distribuées, on peut, à première approximation, les considérer encore comme régulièrement distribuées dans les très petits espaces où se développent les actions moléculaires. Cette disposition particulière des molécules n'existe pas nécessairement toujours, mais elle doit se présenter souvent, au moins par à peu près. Elle se prête d'ailleurs plus aisément au calcul. Je suis donc fondé à l'admettre comme base de mes études sur les propriétés de la matière. Cela posé, j'énonce les principales propriétés des assemblages d'après Bravais; j'établis les formules de transformation de coordonnées quand on prend pour axes directeurs les rangées conjuguées de l'assemblage, et je déduis une relation entre les densités d'un milieu à diverses époques. Cette relation est connue, et les géomètres y sont arrivés par les procédés du Calcul infinitésimal.

II. La deuxième Section est consacrée à l'étude des forces élastiques dans les corps où l'on peut supposer les molécules réduites à des points et régulièrement distribuées. Je commence par établir les formules des composantes élastiques parallèles à des rangées conjuguées de l'assemblage dans les corps purs et ensuite dans les corps mélangés; j'en déduis, en fonction de celles-ci, les composantes sur un plan quelconque. Partant de ces dernières, je calcule les valeurs des composantes élastiques sur trois plans rectangulaires en fonction de celles sur trois plans conjugués, puis les valeurs des composantes élastiques rectangulaires sur un plan quelconque en fonction de celles sur trois plans rectangulaires. Je vérifie en passant, comme simples identités, plusieurs relations que Lamé, dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides,* obtient par des considérations mécaniques. Enfin, je constate la possibilité et les conditions du principe de Pascal.

III. J'ai divisé la troisième Section en deux paragraphes. Dans le premier, je calcule la valeur des composantes élastiques dans le cas simple de rangées conjuguées se coupant à angle droit et au moyen de

formules sommatoires dues à Euler; je montre que les actions exercées par les attractions ou répulsions en raison inverse du carré et du cube de la distance sont insensibles aux distances insensibles, appréciables aux distances mesurables; que les actions exercées par des attractions ou répulsions en raison inverse de la quatrième puissance de la distance sont du même ordre de grandeur aux distances sensibles ou aux distances insensibles; enfin que, pour des attractions ou répulsions en raison inverse de puissances de la distance égales à 5, ou plus grandes, l'action exercée aux distances insensibles est immense par rapport à celle exercée aux distances sensibles. J'en conclus que les actions moléculaires doivent être attribuées à des attractions ou répulsions en raison inverse de puissances de la distance égales à 5 ou plus grandes, et que le facteur constant f_n, commun à tous les termes de même degré, est d'ordre ε^{n-4}, ε étant une grandeur du premier ordre. J'en conclus encore l'impossibilité de pouvoir négliger, dans le calcul des actions moléculaires, les dimensions de la molécule.

Le second paragraphe est consacré au calcul des composantes élastiques en tenant compte des dimensions des molécules. Je me borne au cas des corps purs et à celui de corps formés de groupes binaires de deux parcelles différentes.

IV. J'ai divisé la Section IV en trois paragraphes. Le premier contient les équations générales de l'équilibre et du mouvement des atomes, des centres de gravité des molécules, de ceux des parcelles et, finalement, de ceux de portions plus ou moins étendues d'un milieu. Basées sur le principe de d'Alembert et sur l'intervention d'actions en raison inverse de puissances n de la distance ($n = 5$ ou > 5), elles n'offrent rien de particulier. Dans le deuxième paragraphe, je traite des combinaisons qu'on peut former avec les équations du premier et qui correspondent aux principes des aires et de la conservation des forces vives. Dans le troisième, j'étudie les résultats des équations générales obtenues dans les deux paragraphes précédents. J'y justifie les hypothèses de la Section I sur l'éther luminifère dont l'atome aurait une masse du quatrième ordre pour la gravitation, et des capacités du troisième ordre pour les actions moléculaires; puis je montre que, dans toute portion de milieu, les actions transmises de la portion au milieu environnant, et réciproquement, peuvent être représentées par des forces élastiques et sont dues uniquement aux actions atomiques échangées entre deux

couches d'épaisseur insensible, séparées par la surface terminale de la portion.

V. La Section V comprend quatre problèmes : 1° approximation des équations d'équilibre et de mouvement dans un corps à molécules monoatomiques ou dont les dimensions sont négligeables; 2° approximation des équations d'équilibre et de mouvement dans un corps pur à molécules polyatomiques; 3° même approximation dans un corps formé de groupes binaires de deux parcelles A et B, chaque sorte de parcelles ayant sa même composition propre dans toute l'étendue du corps; 4° approximation des équations du mouvement de l'atome.

Le premier problème conduit aux équations d'équilibre et de mouvement connues, telles qu'on les trouve exposées dans les *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, de Lamé; ainsi se trouve justifiée, pour les corps monoatomiques, l'identité admise jusqu'ici, mais non démontrée entre l'action des forces moléculaires et les forces élastiques agissant au contact des corps; mais, tout en reconnaissant que la supposition *a priori* de l'identité simplifie beaucoup les calculs, je constate qu'elle a l'inconvénient d'empêcher l'étude des véritables actions et de conduire fatalement à des erreurs lorsqu'il s'agit de faire entrer en ligne de compte les dimensions des atomes.

Le second problème conduit à des équations d'équilibre et de mouvement d'une forme un peu plus générale que le précédent, en ce sens que les composantes tangentielles de mêmes indices n'y sont plus identiques; il donne en outre une relation entre les composantes élastiques sur trois plans rectangulaires et celles sur un plan quelconque passant par l'origine, relation qu'on vérifie identiquement. Mais il a un autre intérêt en ce qu'il fournit les moyens de décider si les positions des atomes homologues dans les molécules immédiatement voisines changent dans un rapport insensible ou dans un rapport fini. Elles sont invariables ou elles changent dans un rapport fini, et les espaces périodiques où s'effectuent ces changements ont des dimensions comparables aux distances moléculaires. Les considérations mécaniques au moyen desquelles plusieurs géomètres, Lamé entre autres, ont démontré l'égalité des composantes tangentielles de mêmes indices subsistent, et entrainent trois équations de condition aux dérivées partielles du premier ordre, compatibles avec les équations du mouvement. Une autre conclusion ressort encore de la solution de ce problème : c'est la va-

riabilité par rapport au temps des composantes élastiques en un même centre de gravité; l'expérience ne peut que nous en donner les moyennes.

Le troisième problème conduit aux mêmes équations d'équilibre et de mouvement que le second, ainsi qu'aux mêmes relations entre les composantes élastiques sur un plan quelconque et les composantes élastiques sur trois plans rectangulaires donnés; les composantes élastiques sont aussi variables par rapport au temps en chaque centre donné de groupe. Mais l'étude des actions moléculaires y fournit bien d'autres résultats. L'une des parcelles, A, peut être supposée formée de molécules matérielles; l'autre, B, de molécules d'éther luminifère. Dès lors, la distance du centre de gravité de la parcelle B au centre de gravité O du groupe AB étant une quantité du premier ordre, celle du centre de gravité de la parcelle A à ce même centre O en est une du second. Les atomes éthérés décrivent un nombre immense de fois, dans de très courts intervalles de temps, des orbites de dimensions comparables aux distances moléculaires et peuvent chaque fois s'approcher très près des atomes de la parcelle A du groupe voisin, quelque grande que soit relativement la distance des groupes. Chacun de ces rapprochements amène une grande valeur du multiplicateur de la densité dans l'expression de la composante élastique, et la valeur de ce multiplicateur P ne descend jamais au-dessous d'une certaine limite déterminée par les distances des centres O. Il s'ensuit que, ces distances ne variant ni en grandeur, ni en direction, cas auquel la densité reste constante, la grandeur moyenne du multiplicateur P croît avec la grandeur des orbites des atomes, c'est-à-dire avec la vitesse même de ces atomes. Cette dernière peut en conséquence être mesurée approximativement au moyen d'un instrument où, la pression demeurant constante, P croîtrait en raison inverse de la densité. Or cet instrument est connu : c'est le thermomètre, et l'on montre comment il peut servir à mesurer les accroissements de P, non seulement dans le thermomètre où la pression est constante, mais encore dans les milieux contigus où la force élastique et la densité peuvent être toutes différentes. Seulement il y a plusieurs faits concomitants avec la croissance de vitesse des atomes éthérés; il y a l'oscillation ou révolution, suivant le cas, des centres de parcelles, l'oscillation des centres de gravité des groupes, et l'on manque de données pour attribuer à l'un de ces faits plutôt qu'à un

autre la sensation physique corrélative de chaleur que nous éprouvons.

Les intégrations des équations semblent dépasser les forces actuelles de l'Analyse. Toutefois une hypothèse particulière, plus ou moins approchée de la vérité dans certains cas, permet de trouver une intégrale qui lie le facteur P à la force vive moyenne du centre du groupe. L'équation obtenue alors est à peu près la même que celle obtenue par M. Clausius, parti de considérations impulsionnistes toutes différentes des miennes; les idées attachées aux forces vives moyennes ne sont pas non plus les mêmes. Ce n'en est pas moins un rapprochement curieux, et j'ai dû le signaler.

Le quatrième problème conduit à un dédoublement des équations et à des considérations importantes sur le mouvement des atomes.

L'exposé de mon travail que je viens de faire montre que je n'y ai pas discuté les divers systèmes proposés pour expliquer les phénomènes matériels; j'ai commencé la synthèse de l'hypothèse choisie, voilà tout. Qu'il me soit permis de combattre, dans cette Préface, les principales objections élevées contre cette hypothèse.

M. Clerk Maxwell a démontré (*Theory of heat*, London, 1872) qu'un corps chaud éprouvait nécessairement un mouvement moléculaire intérieur; c'est une objection contre ceux qui croient à l'équilibre des atomes dans un corps chaud et non contre les attractions et répulsions à distance, car celles-ci conduisent exactement à la conclusion de M. Clerk Maxwell.

On a soutenu l'impossibilité d'expliquer la résistance des gaz à la pression par de simples actions à distance; cela tenait au préjugé que le volume des molécules était négligeable, préjugé qui a fait méconnaître le rôle important que ce même volume joue dans la grandeur des forces élastiques.

Enfin on a été chercher dans l'arsenal des sophismes antiques l'objection : *Les actions à distance ne peuvent pas se comprendre; donc elles n'existent pas;* comme si, pour arriver à ses fins, Dieu était obligé d'employer des moyens accessibles à notre intelligence; comme si, d'ores et déjà, nous comprenions toutes les autres lois de la Nature dont nous avons pu constater l'existence. Euler, généralement mieux inspiré, a développé cette objection dans une de ses *Lettres à une princesse d'Alle-*

magne; c'est la paraphrase d'un vieux thème émis dix-huit siècles auparavant par Lucrèce dans son poème *De natura rerum.* Je rapporte ici les deux textes, afin qu'on puisse les comparer.

LUCRÈCE.

De la nature des choses.

Poème, 50 ans environ avant Jésus Christ. Traduction en prose de Pongerville; t. I, p. 75 et suiv. Paris, C.-L.-F. Pankoucke, 1829.

Car n'admets pas, ô Memmius, comme plusieurs philosophes, que tous les corps soient attirés vers le centre du monde, que cet univers, balancé dans le vide, ne soit point soutenu par la pression des chocs extérieurs, et que les objets qui l'environnent dans toute sa circonférence ne puissent s'échapper, parce qu'ils éprouvent la même tendance vers un centre commun. Conçoit-on, Memmius, qu'une masse se soutienne par elle-même et que, sous nos pieds attirés dans une direction opposée à la nôtre, des corps aient la faculté de se mouvoir, comme on voit notre image se réfléchir dans l'onde? Ainsi l'on ose affirmer qu'un monde rempli d'êtres de toute espèce s'agite sous la terre, sans être plus exposé à s'engloutir dans les gouffres inférieurs que nous ne sommes menacés d'un entraînement vers les voûtes célestes; on dit que ces peuples nouveaux sont éclairés par le Soleil quand nous le sommes par les flambeaux nocturnes, et qu'une constante alternative leur partage avec nous les nuits, les jours, les saisons et les années.

C'est ainsi que les doctes qui ont embrassé de faux principes ont admis ces grossières erreurs. Ils ne comprenaient pas qu'il n'existe point de centre dans une étendue infinie. Ce centre existât-il, quelle loi contraindrait les corps de s'y fixer plutôt que dans d'autres parties de l'espace? La nature du vide est de céder aux corps pesants, que leur direction tende vers le centre ou loin de lui. Il n'est aucun lieu dans l'univers où les corps restent immobiles et perdent leur pesanteur. Le

EULER.

Lettres à une princesse d'Allemagne.

Lettre du 18 octobre 1760. Traduction par Cournot; t. I, p. 265 et suiv. Paris, chez Hachette, 1842.

. . . .

Puisqu'il est certain qu'en considérant deux corps quelconques, l'un est attiré vers l'autre, on demande la cause de ce penchant mutuel; c'est là-dessus que les sentiments sont fort partagés. Les philosophes anglais soutiennent que c'est une propriété essentielle de tous les corps de s'attirer mutuellement; que c'est comme un penchant naturel que tous les corps ont les uns pour les autres, en vertu duquel les corps s'efforcent de s'approcher mutuellement, comme s'ils étaient pourvus de quelque sentiment ou désir. D'autres philosophes regardent ce sentiment comme absurde et contraire aux principes d'une philosophie raisonnable. Ils ne nient pas le fait; ils tombent même d'accord qu'il y a actuellement au monde des forces qui poussent les corps les uns vers les autres; mais ils soutiennent que ces forces agissent de dehors sur les corps et qu'elles se trouvent dans l'éther, ou cette matière subtile qui environne tous les corps, de même que nous voyons qu'un corps plongé dans un fluide en peut recevoir plusieurs impressions pour le mettre en mouvement. Donc, selon les premiers, la cause de l'attraction réside dans les corps mêmes et dans leur propre nature; et, selon les derniers, cette cause réside hors des corps, dans le fluide subtil qui les environne. Dans ce cas, le nom d'attraction serait peu propre; il faudrait alors plutôt dire que ces corps sont poussés les uns vers les autres. Mais, puisque l'effet est le même, soit que deux corps soient poussés

vide ouvrira sans cesse un facile passage à leur course. Ce centre qu'on supposa ne suffit donc pas pour s'opposer à la dissolution de l'univers.

Quelle est la contradiction de ces mêmes philosophes! ils affirment que la tendance vers le centre n'est pas commune à tous les corps; ils la réservent à ceux que l'eau ou la terre compose, tels que les flots amers, les fleuves, les torrents qui se précipitent des montagnes et tous ces corps que la terre a nourris. Tandis que l'air subtil, la flamme active, fuient le centre et de toutes parts s'amassent dans les plaines d'azur, les orbes éclatants, l'astre pompeux du jour, s'en repaissent sans cesse, ainsi que des sucs féconds sortis de la terre se nourrissent les êtres animés, les fleurs et les végétaux. Par delà la sphère étoilée, ils placent le firmament; enveloppe impénétrable, il comprime les flammes fugitives, qui, s'exhalant du centre, franchiraient sans lui les limites du monde. Le même désordre envahirait la nature entière; le temple des cieux, les foudres, les astres s'écrouleraient sur nos têtes; la terre ébranlée s'ouvrirait, et les peuples, roulés avec les débris ardents des cieux, s'engloutiraient vivants dans des gouffres sans fond. Bientôt il ne resterait de cet univers qu'un amas de poussière et une solitude éternelle. Car qu'importe le lieu où commencerait le désordre? une porte fatale s'ouvrirait pour la destruction et les éléments en foule se hâteraient de s'y précipiter.

ou attirés réciproquement, le seul nom d'attraction ne doit pas choquer, pourvu qu'on ne veuille pas par là décider sur la nature même de la cause.

. . . .

Les uns disent que c'est la terre qui attire ces corps (ceux qui tombent) par une force qui lui appartient en vertu de sa nature; les autres disent que c'est l'éther, ou autre matière subtile et invisible qui pousse les corps en bas, de sorte que l'effet est néanmoins le même dans l'un et l'autre cas. Le dernier sentiment plaît davantage à ceux qui aiment des principes clairs dans la philosophie, puisqu'ils ne voient pas comment deux corps éloignés l'un de l'autre peuvent agir l'un sur l'autre, à moins qu'il n'y ait quelque chose entre eux. Les autres recourent à la toute-puissance divine et soutiennent que Dieu a revêtu tous les corps d'une force capable de s'attirer mutuellement. Quoiqu'il soit dangereux de vouloir disputer sur ce que Dieu aurait pu faire, il est néanmoins certain que si l'attraction était un ouvrage immédiat de la toute-puissance divine, sans être fondée dans la nature des corps, ce serait la même chose que si l'on disait que Dieu pousse immédiatement les corps les uns vers les autres, ce qui serait des miracles continuels. Supposons qu'avant la création du monde Dieu n'eût créé que deux corps éloignés l'un de l'autre, qu'il n'existât hors d'eux absolument rien, et que ces corps fussent en repos; serait-il bien possible que l'un s'approchât de l'autre ou qu'ils eussent un penchant à s'approcher? Comment l'un sentirait-il l'autre dans l'éloignement? comment pourrait-il avoir un désir de s'en approcher? Ce sont des idées qui révoltent; mais, dès qu'on suppose que l'espace entre les corps est rempli d'une matière subtile qu'on nomme l'éther, il semble plus raisonnable d'attribuer l'attraction mutuelle des corps à une action que l'éther y exerce, quoique la manière nous soit inconnue, que de recourir à une qualité inintelligible.

. . . .

En mettant de côté le mouvement poétique de l'extrait de Lucrèce, le caractère religieux de la Lettre d'Euler, on voit une extrême similitude entre les deux modes d'argumentation. Toutefois Euler est beaucoup moins tranchant que Lucrèce. Mais il n'a pas prouvé que l'attraction n'est pas une qualité de la matière, pas plus que son précurseur Lucrèce n'a démontré que la Terre est plate et dépourvue d'antipodes; le P. Secchi et les autres auteurs qui ont répété l'objection d'Euler n'en ont pas augmenté la valeur.

Je crois inutile de mentionner quelques autres objections que j'ai rencontrées, notamment dans l'*Unité des forces physiques* du P. Secchi. Elles ne m'ont pas semblé valoir une réfutation.

J'achèverai cette Préface en remerciant M. de Saint-Venant, de l'Académie des Sciences, et mon ami Philippe Gilbert, l'éminent professeur de Louvain. Je leur ai communiqué mon travail, il y a quelques années, et ils m'ont donné d'excellents avis, dont j'ai tâché de profiter dans la rédaction de l'Ouvrage actuel. Mais tout ce que celui-ci contient sur les composantes élastiques obtenues en tenant compte des dimensions des molécules est nouveau; j'ai eu bien de la peine à me défaire du préjugé admis : c'est seulement dans les derniers mois de 1882 que j'ai vu clairement la nécessité de tenir compte des dimensions des molécules, et dans le commencement de 1883 que j'en ai aperçu les conséquences au point de vue de la chaleur.

J'ai lu, au cours de l'impression de mon travail, un Ouvrage très original et très curieux sur les lois de la matière, dû à M. Love (G.-H.), et intitulé *Étude sur la constitution moléculaire des corps*, etc. (1); j'y ai trouvé les objections suivantes élevées contre l'explication des phénomènes physiques par des actions à distance. Comme elles sortent du thème ordinaire, elles me semblent mériter un examen spécial. Je les citerai textuellement et les ferai suivre de mes réponses.

Texte. — 5. Je reviens maintenant au système moléculaire sidéral, dont j'ai dû montrer le rapport avec la cosmogonie réfutée des mécani-

(1) P. 11; Paris, Gauthier-Villars, 1883.

ciens ([1]), pour l'examiner en détail. Je ferai remarquer d'abord qu'un pareil système exige de toute nécessité *une molécule centrale régulatrice* d'une dimension supérieure à toutes les autres et disposant en outre d'une quantité de chaleur infiniment plus grande.

Réponse. — L'auteur appelle *système moléculaire sidéral* l'hypothèse de la molécule formée par des atomes circulant les uns autour des autres en vertu d'actions centrales. Il est vrai que les partisans de cette hypothèse, pour en donner une idée, comparent volontiers la molécule à notre système planétaire; mais cette comparaison n'entraine nullement la nécessité d'un atome prépondérant, comme le Soleil l'est dans le système planétaire, malgré l'assertion contraire de M. Love.

L'obligation d'une quantité de chaleur plus grande dans la molécule centrale est encore une affirmation gratuite, conséquence de l'hypothèse de M. Love ([2]) sur la chaleur et son action, et non de celle des forces centrales; or, quand on veut juger une hypothèse, il faut en examiner les conséquences directes et non celles qu'elle aurait en y appliquant un système entièrement différent. L'argumentation est donc ici complètement défectueuse.

Texte. — S'il en était ainsi, tous les corps simples ou composés seraient *dépourvus d'homogénéité*, ce qui est contraire à l'expérience. De plus, les aptitudes aux combinaisons, dépendant absolument de la quantité de chaleur attachée aux molécules, seraient variables dans les parties d'un même corps, ce qui n'a pas lieu.

Réponse. — Il y a ici une confusion évidente entre les suppositions faites pour la molécule et celles faites pour le corps, au moins quand on s'en tient au système des attractionnaires. Pour ceux-ci, l'homogénéité d'un corps dépend de la distribution des molécules et non de celle des atomes dans la molécule. Conséquemment, l'objection porte à faux. Quant à l'objection tirée de la quantité de chaleur, je renvoie à ce que j'en ai dit ci-dessus.

Texte. — D'un autre côté, les distances admises entre les molécules

---

([1]) C'est la désignation que M. Love emploie pour les géomètres.

([2]) Il y a lieu d'observer que M. Love ne croit pas faire d'hypothèses, mais seulement interpréter les faits. Comme ses interprétations sont conjecturales et basées, pour ce qu'il ne voit pas, sur des analogies avec ce qu'il voit, il choisit en réalité entre plusieurs interprétations possibles et fait des hypothèses d'une manière inconsciente.

et le faible diamètre relatif de celles-ci auraient pour résultat qu'aucun corps ne pourrait servir de récipient aux liquides et aux gaz qui passeraient à travers ses parois comme l'eau à travers un crible à larges mailles. Mais ce qui passerait surtout à travers les corps ainsi formés, ce serait la lumière. Tous les corps seraient *diaphanes*.

Réponse. — Ici encore l'auteur s'obstine à juger l'hypothèse attractionnaire en y appliquant la sienne; comme elle est contradictoire, il ne peut obtenir que des résultats absurdes. Ce mode d'argumentation est sans valeur; pour juger une hypothèse par ses conséquences, il faut chercher celles qu'elle entraîne réellement, et non celles qu'elle fournit avec un autre système.

Texte. — Il faudrait encore concilier ce système, où les molécules seraient entraînées dans un mouvement rapide orbitaire ou dans de perpétuelles collisions, comme celles supposées dans les gaz, avec un fait physique d'observation constante établissant que les cristallisations ne peuvent se former que *dans un air calme et un repos absolu*. Suit une tirade contre les mécaniciens, inutile à reproduire.

Réponse. — L'observation constante établit que la cristallisation exige l'absence de tout mouvement d'amplitude sensible, mais l'existence de mouvements moléculaires rapides de très faible amplitude, par suite desquels les molécules se rangent dans l'ordre cristallin. Ces mouvements ne sont nullement incompatibles avec les vibrations d'amplitude insensible que les attractionnaires admettent pour les molécules. Ils n'admettent pas la théorie de Clausius pour les gaz.

Texte. — En Optique, le système de Fresnel vient misérablement échouer contre un fait expérimental des plus simples; car la manière dont les ondulations produites dans une pièce d'eau se comportent à l'égard d'un pieu qu'on y plante verticalement prouve que, *dans ce système, il n'y aurait pas d'ombre; le Soleil éclairerait en même temps la Terre sur toute sa surface;* d'un autre côté, les sons ne se meuvent pas avec la même vitesse, malgré les calculs qui ont prétendu établir le contraire, et il n'est pas douteux qu'il en soit de même pour la lumière, etc. Pas d'autre objection distincte dans le reste du numéro et de l'Ouvrage.

Réponse. — L'objection relative à l'ombre est ancienne; elle remonte au moins à Newton, qui l'élevait contre les théories optiques de Des-

cartes, et elle a été réfutée victorieusement, vers le commencement de ce siècle, par Young au moyen des considérations suivantes. L'expérience montre que, si le pieu n'arrête pas les ondulations du liquide, il y a des obstacles suffisamment grands pour les arrêter d'une manière plus ou moins complète derrière eux. Il y a donc un rapport entre les dimensions de l'obstacle limite et celle des ondulations arrêtées. Or, pour comparer les résultats acquis sur la pièce d'eau aux faits de la lumière, il faut réduire les dimensions de l'obstacle limite dans la même proportion que les ondulations ou vibrations, c'est-à-dire les diviser par environ 1000000. Mais alors l'obstacle n'arrête plus la lumière d'une manière absolue; on sait que de très petits écrans montrent, à des distances suffisamment rapprochées, de la lumière au sein de l'ombre et ne produisent, un peu plus loin, que des franges; c'est même le système de Fresnel, si *misérablement échoué*, qui a conduit comme conséquence à ce fait, vérifié ensuite expérimentalement.

La constance de la vitesse des sons indépendamment de la hauteur a été admise comme résultat de l'expérience avant d'être établie par des calculs empiriques; si elle n'est pas rigoureusement exacte, ce que j'ignore, on ne peut pas en rendre responsable la théorie attractionnaire, en dehors de laquelle ces calculs ont été faits; pareille observation est applicable à la théorie de la lumière. Je dois faire observer que des expériences d'Arago, confirmatives de l'égalité de vitesse de transmission des divers rayons lumineux et exécutées à la demande de Cauchy, paraissent entièrement probantes.

En somme, les arguments de M. Love ne prouvent rien contre la possibilité du système attractionnaire, tel que je l'ai exposé, ni contre les premières conséquences que j'en ai déduites. C'est tout ce que je désirais établir ici, mon but n'étant pas de discuter le système de cet auteur, pas plus que je ne l'ai fait pour les autres systèmes impulsionnaires.

LES

LOIS DE LA MATIÈRE.

ESSAIS DE MÉCANIQUE MOLÉCULAIRE.

SECTION I.

PRÉLIMINAIRES.

1. Aussi loin qu'on remonte dans l'histoire des Sciences, on trouve des penseurs préoccupés d'expliquer les phénomènes matériels qui nous environnent. A l'origine, ces penseurs eurent surtout recours aux principes métaphysiques et agirent par l'imagination plus que par des expériences raisonnées; peu à peu cependant, l'observation des faits acquit une plus grande place; mais l'expérience proprement dite ne commença guère qu'à Kepler et à Galilée. A toutes les époques, les théories émises peuvent, malgré une divergence extrême de détails, être rapportées à deux classes différentes, dont on désigne aujourd'hui les partisans sous les noms respectifs d'*attractionnaires* et d'*impulsionnaires :* les premiers expliquent les phénomènes physiques par des propriétés ou attributs de la matière; ils ne s'occupent pas des moyens que Dieu a employés pour réaliser ces attributs et pensent volontiers que l'homme ne les connaîtra jamais; ils appliquent leur intelligence uniquement à découvrir quels attributs peuvent produire les phénomènes matériels observés. Les seconds estiment que les moyens employés par Dieu pour produire ces derniers sont à la portée de l'entendement humain : ils dirigent en conséquence leurs principaux efforts sur l'expli-

cation des phénomènes connus au moyen des chocs et des impulsions dont ils croient comprendre entièrement le mécanisme.

Tel est encore aujourd'hui l'état de beaucoup d'excellents esprits; tel il était pour tous lorsque Newton, s'élevant au-dessus de ces discussions oiseuses et sans issue, posa le principe que, le monde physique obéissant à des lois fixes, quel que fût le moyen auquel Dieu ait recouru pour les établir, il y avait lieu de chercher au moyen des principes de la Dynamique, science en partie créée par lui, quelles lois fondamentales pouvaient produire les faits astronomiques reconnus par Kepler. Il découvrit ainsi la gravitation universelle. Mais il eut soin, dès l'origine, de spécifier qu'il étudiait seulement les lois mathématiques des faits sans vouloir préjuger en rien, par les mots qu'il employait, les causes qui pouvaient avoir produit ces lois mathématiques. Il répéta depuis cette déclaration dans son *Optique;* je ne crois pas qu'on puisse attacher un autre sens à la déclaration contenue dans la première édition de ses *Principes* (¹), et dont voici la partie principale : « Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedenti ad invicem, sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione ætheris aut aeris, mediive cujuscumque seu corporei seu incorporei oriatur, corpora innatantia in se invicem utcunque impellentia. Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium et qualitates physicas, sed quantitates et proportiones mathematicas in hoc Tractatu expendens. » Je ne vois qu'un sens à ces réserves; le géomètre aborde les questions de mesure et de rapport des actions physiques, lesquelles rentrent dans son domaine; mais les causes et l'essence de ces actions n'en sont pas, et il refuse de s'en occuper.

Par le fait, Newton essaya en Astronomie l'explication des attractionnaires, et il devait en être ainsi; non que l'attribut de la matière soit nécesairement la vérité, mais parce que les attractionnaires, cherchant avant tout une loi capable de produire les faits observés, s'étaient plus approchés de la loi générale existante en supposant une action centrale que ne l'avaient fait les impulsionnaires, préoccupés

(¹) *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, auct. H. Newton; Londres, Joseph Streater, 1687. *De motu corporum*, liber I, sect. XI, scholium, p. 19.

uniquement d'expliquer les phénomènes par des chocs et des tourbillons consécutifs. Quant aux actions qui se développent à l'intérieur ou au contact des corps, les connaissances étaient fort bornées au XVIIe siècle : les attractionnaires n'avaient pas réussi à former sur ce sujet un système acceptable : aussi, malgré tout son génie et l'éclat de ses conceptions, Newton échoua complètement dans son étude des fluides, laquelle forme une partie importante des *Principes;* il échoua de même dans son interprétation des phénomènes lumineux (¹). Les choses ont bien changé depuis ; les expériences et les explications ont été considérablement multipliées et se sont mutuellement contrôlées. Depuis les travaux de Laplace, de Gauss et de Poisson sur la capillarité, de Fresnel, de Cauchy et de leurs successeurs sur l'Optique, on a un système attractionnaire bien coordonné et appuyé de vérifications nombreuses. C'est donc aujourd'hui, ou jamais, le moment de reprendre ce système et de le soumettre à l'analyse. Tel est le but que je me propose dans cet Ouvrage, où je marcherai rigoureusement de conséquence en conséquence et ne comparerai à l'expérience que des résultats nettement acquis, et encore pour en obtenir l'explication matérielle.

2. Voici donc mon hypothèse, c'est celle des attractionnaires précisée dans les derniers détails : on en reconnaîtra les principaux traits qui n'ont rien de nouveau.

A une époque indéterminée, la cause première, Dieu, a doué des points géométriques, ou des *substratums* immensément petits et se comportant comme des points géométriques (²) en nombre immense, d'attributs ou propriétés en vertu desquels ces substratums réagissent incessamment les uns sur les autres aux plus grandes distances comme aux plus petites, tout en conservant leur individualité; il les a distribués dans l'espace conformément à sa volonté, en leur imprimant des

---

(¹) *Voir*, au sujet de la théorie de la lumière de Newton, la très intéressante Communication faite à l'Académie des Sciences par M. Chevreul (*Comptes rendus*, mai 1883).

(²) En fait, je crois, après Cauchy et M. de Saint-Venant, que les atomes sont des points géométriques ; mais je ne l'affirme pas. Au point de vue mécanique, les deux hypothèses peuvent être défendues de notre temps ; au point de vue philosophique, elles ont été jadis l'occasion de nombreuses discussions qui ont divisé l'École en nominalistes et en réalistes. Je n'ose pas trancher la question.



mouvements divers. Les différents attributs ont partout la même nature, mais non les mêmes grandeurs : en cela consistent les différences que l'on observe entre les corps matériels.

On appelle *atome* le substratum ou point matériel doué d'attributs. Plusieurs atomes groupés ensemble à des distances assez petites pour que leurs actions mutuelles l'emportent sur toutes celles de la matière environnante et conservent au groupe l'individualité qui lui est propre constituent la *molécule*. Un ensemble de molécules, rapprochées suffisamment pour ne pas se séparer sous l'action de la matière environnante et garder une individualité distincte, au moins temporairement, est nommé *corps*, quels que soient les modes de distribution intérieure des molécules. Que l'atome ait ou non des dimensions, la molécule en a toujours : ce sont celles, mal délimitées, de l'espace dans lequel circulent les atomes composant la molécule; la forme du corps est la surface enveloppe de toutes les molécules. Elle présente aussi une légère indétermination, puisque le volume des molécules est mal délimité; mais les limites de cette indétermination sont immensément petites à côté des dimensions de la surface du corps.

Dans la molécule, les atomes peuvent être tous d'une seule et même nature, ou ils peuvent être de natures différentes; dans un corps, les molécules peuvent être identiques ou différentes dans leur composition atomique, agir isolément ou par groupes. Toutes ces combinaisons se concilient avec la conception fondamentale. J'appellerai *purs* les corps formés d'une seule sorte de molécules groupées ou non; *mélangés*, ceux qui comprennent des molécules de plusieurs sortes. Ce qu'on nomme en Chimie un corps *simple* est un corps pur où les molécules sont toutes composées d'une même sorte d'atomes, et ce qu'on qualifie de corps *composé* est un corps pur où les molécules contiennent des atomes différents.

3. Avisons à traduire cette conception dans le langage de la Mécanique rationnelle.

Des attributs de la matière agissant à toute distance ne peuvent avoir pour conséquence que des mouvements; ils en sont des causes constantes, parce qu'il n'y a pas de raison, sans une nouvelle intervention divine, pour qu'ils cessent d'agir par moments ou changent de na-

ture ; il sont ce que, dans la langue de la Mécanique rationnelle, on nomme *forces permanentes*. En envisageant donc au point de vue des faits la conception exposée dans le n° 2, on voit qu'elle revient à définir, sous la réserve indiquée en note, les atomes des points géométriques doués de forces permanentes agissant à distance. Ce que sont ces dernières, la comparaison des résultats du calcul avec ceux de l'expérience peut seule nous le révéler ; cela est déjà fait pour toutes les distances appréciables par nos sens, comme pour celles dont la grandeur dépasse notre imagination : la gravitation règle les mouvements des astres dans l'espace et, dans une certaine mesure, ceux des corps voisins de la surface du globe. Mais là surgissent d'autres effets prenant naissance au contact plus ou moins intime des corps et inexplicables par la gravitation (¹); ils sont dus à des actions sensibles seulement aux distances insensibles. Ce sont ces actions, encore inconnues, que je chercherai à déterminer par la synthèse de la conception attractionnaire, en comparant les résultats qu'elle fournit à ceux de l'expérience. Je resterai bien loin de leur détermination complète : je n'ai pas pu pousser mes calculs assez loin ; mais je recueillerai déjà sur elles assez d'indications essentielles pour en rendre l'existence extrêmement probable.

4. Toute action est susceptible d'être mesurée en la comparant à des actions de même espèce prises pour étalons ; partant, elle peut être représentée par une fonction continue quand elle varie par degrés insensibles avec le temps et la distance : ce qui est une propriété reconnue expérimentalement pour les actions moléculaires. La force de l'atome aux distances insensibles peut donc être représentée par une fonction de ces distances. Cette fonction devra conséquemment donner, comme le type qu'elle représente, des valeurs insensibles aux distances sensibles, sensibles aux distances insensibles, infinies aux distances nulles. Ces dernières valeurs appartiendront à des répulsions, condition nécessaire pour que les atomes ne se confondent pas et ne perdent pas leur individualité. Quant aux actions que représentent ces valeurs, elles doivent être alternativement attractives et répulsives, mais toujours, ainsi qu'il vient d'être dit, répulsives aux plus petites distances.

(¹) *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum*, etc. C. F. Gauss, *Werke*; Göttingen, 1867, Band V, p. 31. En note, au bas de la page.

Or toute fonction variant rapidement et continûment avec la distance, grande à des distances insensibles et insensible aux distances appréciables, peut, d'après la théorie générale des fonctions, être représentée par une série finie ou non de termes monômes proportionnels à des puissances inverses de la distance, dont quelques-uns attractifs, puisque l'attraction se manifeste d'une manière évidente dans certains faits, tels que l'adhésion des surfaces; en outre, cette série devra avoir un terme répulsif de plus fort exposant, pour que la répulsion l'emporte aux plus petites distances. Cette dernière condition implique un nombre fini de termes dans la série.

5. Il s'agit de représenter analytiquement ces conclusions. Or nous savons que le terme monôme représentant l'action mutuelle de deux atomes aux distances finies est le produit de trois nombres divisé par un quatrième, savoir : 1° et 2° les masses respectives de deux atomes, c'est-à-dire les nombres représentatifs des capacités [1] d'action en raison inverse du carré de la distance dont ces atomes sont doués [2]; 3° la vitesse relative qu'un de ces atomes prendrait par rapport à l'autre à égalité de masse et à l'unité de distance ; 4° le carré de la distance. Il est naturel d'admettre, au moins à titre d'essai, une composition semblable pour les termes monômes de l'action atomique, et de les regarder comme les produits des deux capacités pour l'attraction (ou répulsion, s'il y a lieu), multipliées par les vitesses relatives que les attractions correspondantes imprimeraient à ces atomes ramenés à l'unité de capacité et de distance, lesquels produits seraient divisés par la puissance n de la distance.

Rien d'ailleurs n'indique dans un atome considéré isolément l'égalité des capacités pour les attractions et répulsions d'exposants différents ; bien des faits au contraire semblent en démontrer l'inégalité.

---

(1) J'aurais préféré au mot *capacité* celui d'*énergie;* mais les géomètres lui ont déjà donné des acceptions différentes.

(2) Dans la conception attractionnaire, la masse n'est pas une entité particulière à l'atome, c'est simplement la capacité pour l'action du poids dont il est doué, ou pour l'effort qu'il faut lui imprimer afin d'obtenir une vitesse donnée. L'expérience a montré l'égalité de ces deux capacités dans chaque atome ; mais elle ne s'est pas prononcée pour les capacités moléculaires et nous les croyons très différentes.

Ainsi l'éther luminifère qui remplit l'espace transmet certains mouvements atomiques ou moléculaires (lumière, chaleur, etc.) avec une capacité aussi grande que les corps matériels, tels que le verre, les métaux, etc. Cependant la masse poids en est tellement faible qu'elle a échappé jusqu'ici aux expériences les plus délicates : ainsi le plomb, plus pesant que le fer, offre une bien moins grande résistance à l'écrasement, etc. Nous sommes donc autorisés à tenir pour différentes les capacités du même atome pour les diverses attractions et répulsions (¹), et nous désignerons par μ_n la capacité de cet atome pour l'attraction ou la répulsion en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance. Nous affecterons, suivant l'usage, la lettre f à la désignation de la vitesse relative en lui donnant pour indice l'exposant n de la puissance correspondante de la distance, dès que cette puissance est > 2; enfin, toujours conformément à l'usage, nous représenterons la distance de deux points (atomes, centre de gravité, etc.) par la lettre r, à laquelle nous donnerons pour indices les lettres caractéristiques de ses extrémités. Soient donc s, s' deux atomes ; le terme représentant en grandeur l'action en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance sera

$$\frac{\mu_{ns}\mu_{ns'}f_n}{r_{ss'}^n}. \tag{1}$$

On prend ordinairement ce terme avec le signe + quand $n = 2$, c'est-à-dire quand il y a attraction en raison inverse du carré de la distance. Conformément à cet usage, nous prendrons les termes attractifs avec le signe + et les termes répulsifs avec le signe —. Nous nommerons spécialement *action atomique* ou *moléculaire*, suivant le cas, celle qui s'exerce seulement aux distances insensibles, et nous la représenterons par la formule suivante, applicable à un groupe de deux atomes; le

(¹) Cette conclusion est le rejet absolu, par ses partisans, d'un système assez séduisant que plusieurs savants, adoptant l'hypothèse de Proust, ont voulu fonder sur la constitution de la matière ; d'après eux, il n'y aurait qu'une matière fondamentale, et les atomes de tous les corps matériels seraient des associations intimes d'un plus ou moins grand nombre d'atomes de la matière fondamentale. Or, si cela était, tous les termes de l'action atomique seraient visiblement des multiples de ceux de la matière fondamentale, et auraient par conséquent tous entre eux les mêmes rapports ; ce qui est contraire à notre conclusion. Au surplus, le système écarté ne peut être soutenu par aucun motif important.

signe + s'y rapporte aux termes attractifs, et le signe — aux termes répulsifs

(2) $$\sum \frac{\pm \mu_{ns} \mu_{ns'} f_n}{r^n_{ss'}}.$$

Dans les cas où l'on pourra négliger les distances atomiques à côté des distances moléculaires, ce qu'on croit possible en général, mais à tort, ainsi que nous le verrons à la Section III, on pourra substituer les actions moléculaires aux actions atomiques; et, en posant alors, dans un corps pur,

(3) $$m_n = \mathrm{S}\,\mu_n,$$

on aura, pour la valeur de l'action moléculaire,

(4) $$\sum \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^n_{ss'}},$$

Cette forme sera toujours applicable aux corps mono-atomiques, pourvu toutefois qu'il en existe dans la Nature.

6. Les distances des molécules sont, on le sait par expérience, tellement petites qu'elles échappent à l'appréciation de nos organes, même aidés de nos instruments les plus puissants. Elles ont cependant un rapport encore inconnu avec le mètre, dont elles sont peut-être des billionièmes, des trillionièmes, peut-être même des fractions encore plus petites; elles sont donc négligeables, elles et leurs multiples assez grands, dans les calculs approchés où l'on tient compte au plus d'un millionième de mètre. A ce point de vue et comparativement aux quantités finies, elles constituent un nouvel ordre de grandeurs que nous qualifierons de *grandeurs de premier ordre;* leurs carrés et leurs produits deux à deux de *grandeurs de deuxième ordre,* leurs cubes et leurs produits trois à trois de *grandeurs de troisième ordre,* et ainsi de suite. D'après cela, une grandeur d'un ordre quelconque n sera négligeable à côté des grandeurs d'ordre inférieur $n - 1$, $n - 2$, etc. Dans cet ordre d'idées, les quantités finies seront des grandeurs d'ordre 0; et les quotients de quantités finies par des grandeurs du $n^{\text{ième}}$ ordre seront des quantités immenses d'ordre $-n$.

7. La masse d'un corps, telle qu'on la mesure, est une quantité finie proportionnelle au volume de ce corps avec lequel elle est dans un rapport constant pour un corps de même nature et de même densité. Si l'on découpe un volume dans un corps et qu'on le diminue graduellement jusqu'à ce que ce volume et les volumes adjacents semblablement diminués contiennent chacun une molécule, le volume réduit aura dans tous les sens des dimensions sensiblement égales aux distances moléculaires et sera, par conséquent, du troisième ordre. La masse correspondante sera donc du troisième ordre; mais elle est précisément celle de la molécule unique contenue dans ledit volume : donc la masse de la molécule est une quantité du troisième ordre; or le nombre des atomes constituant une molécule est fini, probablement même le plus souvent assez petit; la masse-poids des atomes est donc une quantité du troisième ordre, en raison de la formule (3). On peut conclure qu'il en est de même des capacités des atomes pour les autres attractions et répulsions; on admettra donc en général que μ_n est une quantité du troisième ordre.

8. Il ne faut pas croire que l'on trouve dans toutes les directions, à partir d'un centre de molécule ou de parcelle (nous donnons ce nom aux groupes de molécules ayant une individualité propre, n° 2), des molécules ou parcelles agissant avec une égale intensité sur la molécule ou parcelle donnée. Considérons en effet une portion très petite d'un corps formé par la réunion de molécules semblables agissant isolément, et, dans cette portion, la plus petite distance δ de deux centres de molécules. Elle n'est pas nulle, puisque les molécules ont des dimensions et que leurs actions ne leur permettent pas de se confondre. Par conséquent, cette plus petite distance δ existe; mais elle peut se reproduire pour un grand nombre de molécules, sinon même pour toutes, et plusieurs fois pour la même. Cela posé, soient A et B deux centres de gravité situés à cette distance δ l'un de l'autre; on ne peut pas trouver autour de A un troisième centre C qui en soit à la distance δ, à moins que l'angle BAC ne soit égal à 60° ou plus grand; autrement la distance BC serait $< \delta$, contrairement à l'hypothèse. On peut dès lors se rendre compte du nombre maximum des distances δ correspondant au centre A; en effet, on sait qu'il n'existe pas de polyèdre régulier dont

le côté soit égal au rayon de la sphère circonscrite; mais, en cherchant combien de fois la surface du triangle sphérique dont les côtés ont 60° ([1]) est contenue dans la surface de la sphère, on a, d'une manière approchée, le maximum du nombre de centres qui peuvent être situés à une distance δ de A. Or on trouve, en faisant le calcul, que le nombre de ces triangles égale 14,519; donc il y a au plus quatorze points situés à la distance δ de A; et, s'ils existent, les plus rapprochés qui viendraient ensuite en nombre à peu près égal seraient situés à la distance $\delta\sqrt{3}$. Nous verrons ci-après (Sect. III, n° 3) que, dans l'action atomique, l'exposant n est au moins égal à 5 et probablement plus grand; donc l'action des molécules immédiatement consécutives, si elles existent dans les intervalles, sera au plus la $\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)^{\text{ième}} = \left(\frac{1}{15,57}\right)^{\text{ième}}$ partie des premières actions; les suivantes seront encore moins sensibles. Donc les quatorze molécules les plus rapprochées, si elles existent, et dans l'autre cas les molécules les plus rapprochées, moins nombreuses encore, exercent une action prépondérante que celle des molécules les plus éloignées contrebalancent dans une faible proportion. Il faut donc qu'elles se fassent à peu près équilibre, puisque le corps y est et n'a que des mouvements intérieurs dus à des différences d'actions extrêmement petites et jouant le rôle de forces accélératrices. Cette condition laisse place seulement à un petit nombre de combinaisons quand on se borne à considérer la position relative des centres et non l'orientation relative des droites qu'ils déterminent deux à deux. Or cet équilibre autour du centre A doit exister aussi autour de tous les centres environnants; ce qui exige, ou la reproduction à peu près identique autour du centre B de la distribution des molécules autour du centre A et ainsi de suite; ou une disposition de molécules autour du centre B différente de celle qui a lieu autour du centre A, mais qui produise un effet équivalent. Nous allons examiner les conséquences de l'une et de l'autre de ces déductions, conciliables toutes les deux avec l'hypothèse fondamentale du n° **2**.

9. I. *La disposition des centres les plus rapprochés est à peu près identique en* A *et en* B *ainsi que dans les centres voisins.* — On doit alors

([1]) Ce triangle correspond au triangle rectiligne équilatéral de côté égal au rayon.



trouver autour de B un troisième centre B, à peu près placé par rapport à B comme B l'est par rapport à A; c'est-à-dire tel que BB_1 soit à très peu près égal en grandeur et en direction à AB. Par suite, on trouvera un quatrième centre B_2 tel que B_1B_2 soit à très peu près égal en grandeur et en direction à BB_1; et ainsi de suite. Il y aura donc une série de centres de molécules équidistants et situés en ligne droite à de très petites quantités près, savoir A, B, B_1, B_2, ... Le même raisonnement est applicable aux autres directions issues de A et déterminées par des centres de molécules ; on voit donc que la première hypothèse revient, lorsqu'on néglige de très légères différences de distance et d'inclinaison, à supposer les molécules distribuées par *rangées* ou, ce qui revient au même, *distribuées régulièrement dans* l'espace (1); à la vérité, le *paramètre* ou distance de deux centres consécutifs sur une rangée et la direction même des rangées peuvent varier par degrés insensibles quand on s'éloigne du centre primitivement considéré; mais ils doivent être tenus pour constants, au moins en première approximation, dans la très petite étendue où les actions atomiques sur une molécule donnée sont sensibles. La conséquence forcée de cette répartition des molécules est que leurs centres de gravité sont distribués comme les sommets d'une multitude de parallélépipèdes égaux et jointifs (*parallélépipèdes générateurs*) dont les côtés déterminent trois systèmes de rangées contenant tous les centres (*ou sommets*) de l'*assemblage*. Ceux-ci sont déterminés par les intersections trois à trois desdites rangées. De même les faces des parallélépipèdes (*parallélogrammes générateurs*) déterminent trois systèmes de *plans réticulaires* contenant tous les centres et toutes les rangées de l'assemblage qu'ils déterminent par leurs intersections trois à trois et deux à deux. J'appellerai *conjugués* ces plans et ces rangées, conformément aux désignations adoptées par Bravais dans le Mémoire précité.

II. *La distribution des points les plus rapprochés de* B *n'est pas la même qu'autour de* A; *elle est telle cependant qu'elle lui fait équilibre.* — Ce résultat ne peut être atteint que par une autre combinaison de centres,

---

(1) *Voir* la signification donnée à ces mots par Bravais dans son *Mémoire sur les systèmes formés par les points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace*. Paris, Bachelier, 1850. J'en adopte les dénominations, mais non les notations.

parmi lesquels A est donné, et qui seront nécessairement au-dessous de quatorze; déjà dans l'hypothèse précédente, nous arrivons à en avoir seulement, comme maximum, six équidistants. Quand on ne s'occupe pas de l'orientation générale, il ne peut y avoir qu'un nombre fini et assez petit de ces dispositifs de molécules capable de faire équilibre à un dispositif donné; il s'ensuit qu'en marchant dans une direction convenue d'avance, on les aura bientôt épuisés et l'on devra retomber sur un des précédents. Si l'on considère alors comme séparés les groupes de molécules où ces divers dispositifs se produisent, les centres de ces groupes ou parcelles rentreront en général dans le cas de l'hypothèse précédente.

Les raisonnements ci-dessus conviennent aux corps composés de parcelles quand celles-ci ont toutes une même composition; il suffit d'y substituer le centre de gravité de la parcelle à celui de la molécule.

La première hypothèse, qui aboutit à la distribution régulière, est la plus commode pour le calcul; c'est la seule que nous emploierons jusqu'à nouvel ordre, et soumettrons à l'analyse.

10. Nous pouvons prendre dans un assemblage un sommet (ou centre de molécule) quelconque pour origine et trois rangées conjuguées (n° 9) issues de ce sommet pour axes coordonnés (*rangées directrices*). Il est évident que ces trois rangées et un centre M quelconque déterminent un parallélépipède de côtés parallèles à ceux du parallélépipède générateur; qu'en outre, chacun de ces côtés contiendra un nombre entier de paramètres de la rangée directrice parallèle. Si donc on représente par h, k, l les côtés du parallélépipède générateur, autrement dit les paramètres des rangées directrices, les côtés du parallélépipède déterminé par le sommet M, lesquels sont en même temps coordonnées du point M, seront respectivement égaux à ξh, ηk, ζl, ξ, η, ζ étant des nombres entiers. Nous pouvons donc écrire

$$x=\xi h,\quad y=\eta k,\quad z=\zeta l; \tag{5}$$

et toutes les valeurs entières, positives ou négatives, qu'on donnera à ξ, η, ζ, correspondront à un sommet de l'assemblage indéfiniment prolongé. Les points intermédiaires seront déterminés par les mêmes for-



mules où un ou plusieurs des coefficients ξ, η, ζ recevront des valeurs fractionnaires.

11. Le même assemblage correspond à une infinité de parallélépipèdes générateurs différents, et Bravais a reconnu que le caractère de ceux-ci était d'être équivalents [1]. De même les parallélogrammes générateurs sont équivalents sur un plan réticulaire. J'étais arrivé moi-même à ces résultats avant de connaître le travail de Bravais [2] qui me fut révélé par des Communications faites en 1869 à l'Académie des Sciences par M. Félix Lucas. En effet, les conséquences de l'hypothèse (n° 9, I), que j'avais adoptées depuis longtemps, conduisent forcément à l'étude des assemblages. Après m'être cru pendant environ deux ans l'inventeur de ces théorèmes importants, j'en reportai longtemps l'honneur à Bravais. Autre erreur. Ayant entrepris en 1882 l'étude du second volume des Œuvres complètes de Gauss, je vis avec surprise que le premier auteur de la théorie des assemblages, avec d'autres termes bien entendu, était l'illustre géomètre hanovrien. Mais il n'a parlé publiquement de ses découvertes que dans un Rapport lu en juillet 1831 à la Société des Sciences de Göttingue, sur un travail de Ludwig August Seeber [3], Rapport qui ne semble pas avoir eu de retentissement en France et a certainement été inconnu de Bravais. Quant au travail sur ce sujet trouvé dans les papiers posthumes de Gauss, et intitulé *Côté géométrique des formes ternaires* [4], il a été publié seulement en 1863, plusieurs années après la mort de Bravais. Je reviens à mon sujet.

Les équivalences des parallélépipèdes et parallélogrammes générateurs correspondant aux mêmes assemblages se traduisent par des relations analytiques. Soient effectivement $\xi_1 h$, $\eta_1 k$, $\zeta_1 l$; $\xi_2 h$, $\eta_2 k$, $\zeta_2 l$; $\xi_3 h$, $\eta_3 k$, $\zeta_3 l$ les coordonnées respectives des extrémités des trois côtés d'un parallélépipède générateur quelconque ayant un sommet à l'origine et différent de celui qui répond aux rangées directrices; a, b, c les cosi-

(1) *Mémoire sur les systèmes fournis par les points*, etc., déjà cité, p. 42 et suiv.

(2) *Recherches mathématiques sur les lois de la matière*, p. 58. Paris, Gauthier-Villars, 1868.

(3) *Carl Friedrich Gauss Werke*, zweiter Band, p. 188 à 196; zu Göttingen, 1863.

(4) Même volume. L'application de la théorie de la représentation des formes ternaires par des points à la théorie de la cristallisation, but principal de Bravais, occupe la fin de ce Mémoire et commence aux mots *Das Grundgesetz der Crystallisation*, p. 308 et suiv.



nus respectifs des angles que font entre elles les rangées respectives k et l, l et h, h et k; P la valeur donnée par l'équation

$$(6)\qquad P^2 = 1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc;$$

les volumes du parallélépipède générateur correspondant aux axes et d'un autre parallélépipède générateur quelconque seront donnés respectivement par les formules suivantes, connues, dans la seconde desquelles j'emploie la notation usitée aujourd'hui pour les déterminants :

$$Phkl, \quad P\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} hkl;$$

leur égalité entraîne donc la relation

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 1.$$

L'équivalence des parallélogrammes générateurs sur un même plan réticulaire donnerait la relation analogue

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Dans un même assemblage, ces relations devront être satisfaites par des valeurs entières de ξ, η, ζ.

12. Nous terminerons ces considérations générales sur les assemblages par la recherche des formules de transformation des coordonnées quand les axes sont de part et d'autre des rangées conjuguées.

Soient x', y', z' les nouvelles coordonnées rapportées à des axes directeurs déterminés par trois rangées conjuguées de paramètre h', k', l', dont les projections sur les premiers axes soient respectivement

$$\begin{matrix} \xi_1 h, & \eta_1 k, & \zeta_1 l; \\ \xi_2 h, & \eta_2 k, & \zeta_2 l; \\ \xi_3 h, & \eta_3 k, & \zeta_3 l. \end{matrix}$$

Il est visible : 1° que l'ordonnée d'un point dans le système x, y, z (soit la projection de la distance de ce point à l'origine sur l'un des axes x, y, z) est égale à la somme des projections des coordonnées du même point dans le système x', y', z' sur cet axe ; 2° que ces projections sont aux coordonnées x', y', z' comme les projections des paramètres h', k', l' sur le même axe sont à ces paramètres. Ces deux principes donnent immédiatement la relation

$$\xi h = \xi' h' \frac{\xi_1 h}{h'} + \eta' k' \frac{\xi_2 h}{k'} + \zeta' l' \frac{\xi_3 h}{l'},$$

et deux autres semblables qui, tous calculs faits, se réduisent aux suivantes, lesquelles sont les relations demandées :

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = \xi_1 \xi' + \xi_2 \eta' + \xi_3 \zeta', \\ \eta = \eta_1 \xi' + \eta_2 \eta' + \eta_3 \zeta', \\ \zeta = \zeta_1 \xi' + \zeta_2 \eta' + \zeta_3 \zeta'. \end{cases}$$

Elles expriment les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles ; en permutant les accents, on aura les formules réciproques

$$(10) \quad \begin{cases} \xi' = \xi'_1 \xi + \xi'_2 \eta + \xi'_3 \zeta, \\ \eta' = \eta'_1 \xi + \eta'_2 \eta + \eta'_3 \zeta, \\ \zeta' = \zeta'_1 \xi + \zeta'_2 \eta + \zeta'_3 \zeta, \end{cases}$$

qui donneront les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes. Si l'on eût au contraire résolu les équations (9) en tenant compte de la relation (7), on eût trouvé

$$(11) \quad \begin{cases} \xi' = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ \eta' = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ \zeta' = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{cases}$$

où l'on a écrit, pour abréger,

$$(12) \quad \begin{cases} a = \eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2, & b = \zeta_2 \xi_3 - \zeta_3 \xi_2, & c = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2; \\ a' = \eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3, & b' = \zeta_3 \xi_1 - \zeta_1 \xi_3, & c' = \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3; \\ a'' = \eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1, & b'' = \zeta_1 \xi_2 - \zeta_2 \xi_1, & c'' = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1. \end{cases}$$

La coexistence des équations (10) et (11) entraîne les conditions

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi'_1 = a, & \xi'_2 = b, & \xi'_3 = c; \\ \eta'_1 = a', & \eta'_2 = b', & \eta'_3 = c'; \\ \zeta'_1 = a'', & \zeta'_2 = b'', & \zeta'_3 = c''. \end{cases}$$

13. Nous avons, dès à présent, les moyens suffisants d'étudier les corps purs; établissons ceux d'étudier au moins certaines catégories de mélanges.

La distribution régulière, résultant de l'hypothèse exposée au n° 9, I, est applicable à tous les corps purs en équilibre où tout est, à des quantités insensibles près, distribué symétriquement autour de chaque centre de gravité, tant comme masse que comme distance; mais la symétrie des centres n'entraîne plus l'équilibre dans un corps mélangé, à moins qu'elle ne coexiste avec une symétrie dans la nature des molécules ou parcelles, laquelle symétrie aura lieu par rangées. Alors chaque rangée ne peut contenir que deux sortes de molécules ou de parcelles se succédant alternativement, en sorte que chacune d'elles soit placée symétriquement par rapport aux autres. Il est aisé de reconnaître qu'alors le corps ne peut pas contenir plus de huit sortes de parcelles placées aux huit sommets du parallélépipède générateur et correspondant chacune à un parallélépipède différent. L'ensemble de ces huit parallélépipèdes générateurs correspondant aux huit sortes de molécules ou de parcelles formera un parallélépipède semblable au parallélépipède générateur et de côtés doubles; nous le qualifierons du nom de parallélépipède *octuple*. Nous attribuerons en outre, dans les corps purs ou mélangés, la molécule ou la parcelle au parallélépipède dont son centre occupe le sommet de l'angle trièdre des coordonnées positives. Ces conventions sont de simples questions d'ordre.

Un mélange régulier de moins de huit corps différents rentre dans le précédent, où il suffit de supposer identiques un certain nombre des huit parcelles du parallélépipède octuple, ou même encore d'en supposer quelques-unes nulles. Pour plus de généralité, nous admettrons, dans ce qui va suivre, l'existence des huit sortes de parcelles.

Enfin, on peut constater aisément que si, dans un mélange, on change de parallélépipède générateur, la distribution restera toujours

régulière, et le parallélépipède octuple correspondra encore à huit parcelles différentes qui pourront seulement être placées dans un autre ordre. Les coefficients ξ, η, ζ des paramètres dans les expressions (5) de coordonnées ont tous, pour un système d'axes donné et une même sorte de parcelles, les mêmes parités et imparités.

Nous considérerons, par la suite de ce travail, les seuls mélanges remplissant les conditions précédentes ou pouvant s'y rattacher comme à un état antérieur, non que nous mettions en doute l'existence de mélanges différents, mais seulement parce qu'ils se prêtent plus facilement au calcul.

14. Nous allons terminer la Section I par l'application des formules précédentes à la recherche de la loi qui unit entre elles les densités d'un corps en un point donné quand cette densité varie d'une manière continue.

La densité d'un corps est le quotient d'une division dont le dividende est le nombre représentatif du poids, et le diviseur est le nombre représentatif du volume. Quand un corps et une quelconque de ses parties ont la même densité, on dit que la densité du corps est constante; quand elles ne l'ont pas, on appelle *densité* du corps en un point la limite vers laquelle convergent les densités successives obtenues en faisant décroître aussi loin que possible la portion dont ce point occupe sensiblement le centre. Telle est la densité qu'il s'agit de déterminer quand on connaît les lois de déformation du corps. Or évidemment, quand on arrive à de très petites portions du corps organisé suivant la conception du n° 9, I, ou du n° 13, on aborde des régions où l'on peut supposer les centres de molécules ou de parcelles régulièrement distribués; et il faudra procéder, pour former des volumes décroissant proportionnellement avec les masses, par multiples entiers de parallélépipèdes générateurs, si l'on est dans un corps pur, ou de parallélépipèdes octuples, si l'on est dans un corps mélangé. Cela posé, le plus petit volume proportionnel aux masses qu'on puisse obtenir est, dans le corps pur, le parallélépipède générateur avec la masse d'une molécule, ou d'une parcelle suivant le cas, et, dans le corps mélangé, le parallélépipède octuple avec la masse de huit parcelles. En appelant respectivement m, M ces masses et V le volume

du parallélépipède générateur, ρ la densité, on trouvera par définition :

1° Pour le corps pur,

$$(14) \qquad \rho = \frac{m}{V}, \quad \text{soit} \quad m = V\rho;$$

2° Pour le corps mélangé,

$$(15) \qquad \rho = \frac{M}{8V}, \quad \text{soit} \quad M = 8V\rho.$$

Ces équations renferment des quantités m, M et V qui échappent à nos moyens de mesure; mais on peut les remplacer par des formules analytiques exprimables en quantités finies, représentant les variations de ρ pour un même corps. Car une conséquence nécessaire des actions moléculaires ne variant avec la distance et le temps que par degrés insensibles est, quand le corps ne se décompose pas, que les mouvements et déformations s'opèrent d'une manière continue, en sorte que les coordonnées d'un point en un instant quelconque dépendent de celles qu'il avait dans un instant donné et du temps écoulé depuis. Soient donc x, y, z les coordonnées d'un point à l'instant t, et x_0, y_0, z_0 ce qu'elles étaient à l'instant t_0; on pourra écrire

$$(16) \qquad \begin{cases} x = f_1(x_0, y_0, z_0, t), \\ y = f_2(x_0, y_0, z_0, t), \\ z = f_3(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases}$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$(17) \qquad q'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_0}, \quad q''_i = \frac{\partial f_i}{\partial y_0}, \quad q'''_i = \frac{\partial f_i}{\partial z_0} \quad (i = 1, 2, 3),$$

et si l'on considère le point extrêmement rapproché dont les coordonnées étaient, à l'instant t_0,

$$x_0 + \Delta x_0, \; y_0 + \Delta y_0, \; z_0 + \Delta z_0,$$

on verra qu'à l'instant t les coordonnées de ce point seront, à des

quantités du second ordre près,

$$(18)\qquad \begin{cases} x + \Delta x = x + q'_1 \Delta x_0 + q''_1 \Delta y_0 + q'''_1 \Delta z_0, \\ y + \Delta y = y + q'_2 \Delta x_0 + q''_2 \Delta y_0 + q'''_2 \Delta z_0, \\ z + \Delta z = z + q'_3 \Delta x_0 + q''_3 \Delta y_0 + q'''_3 \Delta z_0. \end{cases}$$

Or, m et M étant des quantités constantes, les équations (14) et (15) appliquées en deux instants différents donnent

$$V_0 \rho_0 = V\rho \quad \text{et} \quad 8V_0\rho_0 = 8V\rho,$$

soit toujours

$$(19)\qquad V_0\rho_0 = V\rho.$$

On a donc, en vertu des formules connues qui donnent, pour des coordonnées rectangulaires comme ci-dessus, le volume d'un parallélépipède en fonction des projections de ses côtés,

$$\rho_0 \begin{vmatrix} \Delta x'_0 & \Delta y'_0 & \Delta z'_0 \\ \Delta x''_0 & \Delta y''_0 & \Delta z''_0 \\ \Delta x'''_0 & \Delta y'''_0 & \Delta z'''_0 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \Delta x' & \Delta y' & \Delta z' \\ \Delta x'' & \Delta y'' & \Delta z'' \\ \Delta x''' & \Delta y''' & \Delta z''' \end{vmatrix},$$

$\Delta x^{(i)}$, $\Delta y^{(i)}$, $\Delta z^{(i)}$ représentant les projections d'un côté du parallélépipède. En remplaçant dans le second membre de cette équation les Δx, Δy, Δz par leurs valeurs (18), et observant que le déterminant y devient alors, d'après les règles de la multiplication des déterminants, le produit du déterminant du premier membre par le déterminant fonctionnel des équations (16), on obtient, en divisant, la relation

$$(20)\qquad \rho_0 = \rho \begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix}$$

ou, avec les notations ordinaires,

$$(21)\qquad \rho_0 = \rho[q'_1(q''_2 q'''_3 - q''_3 q'''_2) + q''_1(q'''_2 q'_3 - q'''_3 q'_2) + q'''_1(q'_2 q''_3 - q'_3 q''_2)].$$

Elle est publiée depuis longtemps et l'on en trouve déjà un cas particulier, celui où ρ est constant ($\rho_0 = \rho$), exposé dans la *Mécanique ana-*

lytique de Lagrange [1]. Cependant des géomètres postérieurs, tels que Poisson, n'ont donné que l'équation différentielle de cette relation sous la forme bien connue, où u, v, w sont les composantes de la vitesse du point,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{22}$$

On est arrivé aux équations (20), (21), (22) par la méthode infinitésimale; cela n'a rien de surprenant, puisque, dans cette méthode comme dans nos calculs approximatifs, on cherche une formule débarrassée des quantités descendant au-dessous de certaines limites. Si nous ne pouvons pas employer dans tous les cas le Calcul infinitésimal, c'est que ces limites y peuvent descendre au-dessous de toute grandeur assignable, tandis que, dans nos approximations, ces limites y sont simplement des ordres de grandeur. Elles peuvent alors, en se combinant, donner naissance dans certains cas à des quantités nullement négligeables, tandis qu'elles le seraient dans le Calcul infinitésimal.

(1) *Mécanique analytique* par J.-J. Lagrange, 3ᵉ édition, revue corrigée et annotée par M. J. Bertrand, t. II. Paris, Mallet-Bachelier, 1855, p. 259.



SECTION II.

FORCES ÉLASTIQUES. — PREMIÈRE ÉTUDE.

Molécules monoatomiques.

8. Lorsqu'on superpose un corps à un autre, il est bientôt en équilibre, parce que les actions moléculaires qui se développent au voisinage de la surface de contact arrivent à détruire les vitesses que la pesanteur imprime au corps supérieur. Quand la surface commune de contact est plane, on appelle résistance à la pression ou *force élastique* la réaction qui maintient le corps supérieur en équilibre, et on la mesure par le quotient d'une division dont le dividende est le nombre représentatif de la résultante des actions exercées, et le diviseur, celui de l'aire de contact. Quand, en divisant la surface plane de contact en diverses parties et le corps supérieur en fragments proportionnels à ces parties qui leur servent de bases, on obtient les mêmes valeurs de la force élastique, on dit que celle-ci est constante; on la dit variable dans le cas contraire, et l'on appelle *force élastique superficielle en un point de la surface* la limite vers laquelle convergent les forces élastiques obtenues successivement en diminuant progressivement un prisme découpé dans le corps supérieur et dont la base, comprise dans la surface de contact, contient le point envisagé.

Cette définition est applicable aux plans idéaux que l'on peut supposer menés à l'intérieur des corps; et comme ici tout est semblable de chaque côté du plan, ce qui n'a pas lieu avec deux corps en contact, l'évaluation des forces élastiques n'y présente plus la même difficulté. Nous allons nous occuper de les calculer.

Il résulte de la conception du n° 9, I, Sect. I, qu'on arrive, en approchant des limites, à des parties du corps assez petites pour que les molécules ou parcelles puissent y être regardées comme régulièrement distribuées dans le voisinage très rapproché du point où l'on veut déterminer la force élastique. Quant aux molécules ou parcelles plus éloignées, leur intervention est si peu sensible, à cause du décroissement très rapide des actions moléculaires, qu'on peut, sans erreur appréciable dans les résultats, leur prêter telle disposition qu'on voudra et négliger par suite leur écart de la distribution régulière (1); l'hypothèse la plus commode pour le calcul, que j'adopterai en conséquence, est de supposer l'assemblage continué à l'infini des deux côtés du plan auquel on rapporte la force élastique. Ceci posé, le plan peut être un des plans réticulaires de l'assemblage, ou ne pas l'être. J'examinerai successivement ces deux cas.

2. I. *Le plan sur lequel on veut déterminer la force élastique au point* O *est un plan réticulaire de l'assemblage.* — La limite inférieure du prisme dont les actions déterminent le numérateur de la force élastique sera visiblement, dans un corps pur, le parallélépipède indéfini ayant pour base un parallélogramme générateur du plan réticulaire donné L, pour sommet le point O où l'on cherche la force élastique, et pour arête une rangée issue de O, conjuguée au plan L. On peut s'assurer facilement que les choix de la rangée et du parallélogramme générateur n'ont aucune influence sur les résultats. Dans un corps mélangé, un semblable parallélépipède ne contiendrait que deux sortes de parcelles et descendrait au-dessous de la limite à laquelle la composition

(1) Il convient de se rappeler ici une objection que, dans ses *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (*Carl Friedrich Gauss Werke*, fünfter Band, Göttingen, 1867, p. 32 et 33), Gauss élève contre un calcul de ce genre dans la *Théorie de l'action capillaire* de Laplace; des parties de l'action moléculaire n'intervenant pas aux distances insensibles à cause de leur petitesse pourraient devenir très grandes aux distances sensibles et modifier d'une manière importante la valeur véritable de cette action : tel est, dit-il, le terme en raison inverse du carré de la distance ; mais il fait observer en même temps que cette objection tombe immédiatement si l'on ne comprend pas ce terme dans l'action moléculaire ; c'est ce que nous déclarons expressément faire, et nous montrerons ci-après, à la Sect. III, qu'aucun terme appartenant réellement à l'action moléculaire n'a d'action sensible aux distances sensibles.

du corps est uniforme; la limite des prismes sera dès lors un parallélépipède indéfini ayant pour sommet O, pour base un parallélogramme de côtés doubles et pour arête la rangée conjuguée en O au plan L. Ce parallélépipède comprendra quatre rangées différentes et par conséquent les huit sortes de molécules ou de parcelles.

II. *Le plan sur lequel on veut déterminer la force élastique n'est pas un plan réticulaire de l'assemblage.* — Alors encore on pourra considérer comme le prisme limite le parallélépipède contenant une rangée dans les corps purs, quatre dans les corps mélangés, dont une passant par le point O, et perçant le plan L qu'il coupera suivant un parallélogramme qu'on prendra pour la base.

Ces définitions reviennent à celles qu'a données Lamé dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* [1], et qu'acceptent tous les géomètres attractionnaires; elles n'en diffèrent qu'en un point, celui de la distribution régulière des molécules que l'on croyait spéciale aux corps cristallisés. D'après elles, le numérateur de la fraction qui représente la composante de la force élastique parallèle à l'axe des u ($u = x, y, z$) sera la somme, parallèlement à cet axe, de toutes les actions exercées par les molécules intérieures au plan sur les molécules de la rangée extérieure, s'il s'agit de corps purs, ou sur les molécules des quatre rangées extérieures, s'il s'agit de corps mélangés; le dénominateur de cette même fraction sera l'aire du parallélogramme générateur dans le cas du corps pur et quatre fois cette aire dans le cas du corps mélangé.

Dans le cas où le plan L n'est point un plan réticulaire, le parallélogramme générateur sera celui du réseau virtuel déterminé sur le plan L par les intersections des rangées parallèles à la rangée envisagée.

3. Traduisons ces expressions en formules en commençant par les corps purs et la recherche de la force élastique sur un plan réticulaire.

Prenons pour axes des coordonnées : 1° la rangée extérieure de paramètre h pour axe des x; 2° deux rangées conjuguées dans le plan réticulaire, de paramètres k et l, et issues du point O, pour axes respectifs des y et des z; appelons r la distance du centre de gravité d'une

[1] Paris, Bachelier, 1852. *Voir* la définition de la force élastique, § 5, p. 8.



molécule intérieure au centre de gravité d'une molécule extérieure de la rangée h; conservons d'ailleurs les notations du n° **10**, Sect. I; les projections de r seront $(\xi - \xi')h$, ηk, ζl; comme $\xi - \xi'$, différence de deux nombres entiers, est un nombre entier lui-même et peut recevoir une valeur entière quelconque de $+1$ à $+\infty$, si nous regardons les ξ extérieurs comme positifs, ce qui est toujours permis, nous pourrons, par abréviation, remplacer $\xi - \xi'$ par ξ, sous cette réserve qu'il sera toujours positif; au contraire, η et ζ peuvent recevoir toutes les valeurs entières comprises entre $\pm\infty$. Cela posé, désignons respectivement par a, b, c les cosinus des angles que font entre elles les rangées k et l, l et h, h et k; nous aurons

$$(1)\qquad r^2 = \xi^2 h^2 + \eta^2 k^2 + \zeta^2 l^2 + 2a\eta\zeta kl + 2b\zeta\xi lh + 2c\xi\eta hk.$$

L'action mutuelle de deux molécules de même masse m sera, en négligeant les dimensions des molécules à côté de leurs distances, ainsi qu'on le fait habituellement ([1]),

$$(2)\qquad \sum \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^n},$$

et les composantes en seront, parallèlement aux axes des x, y, z,

$$\xi h \sum \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^{n+1}},\quad \eta k \sum \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^{n+1}},\quad \zeta l \sum \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^{n+1}},$$

soit

$$(3)\qquad \xi h \mathcal{A},\quad \eta k \mathcal{A},\quad \zeta l \mathcal{A},$$

en posant, pour abréger,

$$(4)\qquad \mathcal{A} = \sum \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^{n+1}}.$$

La somme des composantes de ces actions dans toute l'étendue de la rangée sera donc

$$(5)\qquad S\xi h \mathcal{A},\quad S\eta k \mathcal{A},\quad S\zeta l \mathcal{A}.$$

([1]) *Voir* la formule (4) de la Sect. I. En négligeant les dimensions des molécules, nous usons d'un droit généralement accepté, mais à tort; *voir* la Sect. III, n° **1**. Nos formules seront applicables seulement aux corps monoatomiques.

Les sommations indiquées par rapport aux variables ξ, η, ζ en désignent une seule par rapport à chacune des variables η, ζ, tandis qu'elles en impliquent deux par rapport à ξ, qui représente en réalité deux variables ξ et ξ'. Mais l'une de ces sommations peut être effectuée immédiatement; en effet, pour le même couple de valeurs η et ζ, qui représente une rangée h intérieure et parallèle à l'axe des x, il y a une seule valeur de $\xi = 1$ $(\xi = 1,\ \xi' = 0)$; deux de $\xi = 2$ $(\xi = 2,\ \xi' = 0;\ \xi = 1,\ \xi' = -1)$; trois de $\xi = 3$ $(\xi = 3,\ \xi' = 0;\ \xi = 2,\ \xi' = -1;\ \xi = 1,\ \xi' = -2)$; et, en général, i de $\xi = i$; si donc on somme entre elles les composantes correspondant aux mêmes valeurs de ξ, η, ζ, on trouve les composantes partielles

$$\xi^2 h\mathcal{A},\quad \xi\eta k\mathcal{A},\quad \xi\zeta l\mathcal{A}.$$

Les numérateurs des composantes de la force élastique seront donc définitivement, avec une seule sommation par rapport à chacune des variables ξ, η, ζ,

$$\text{(6)}\qquad S\xi^2 h\mathcal{A},\quad S\xi\eta k\mathcal{A},\quad S\zeta\xi l\mathcal{A}.$$

Mais il y a ici, entre la sommation de ξ et les sommations de η, ζ, une différence que l'on peut faire disparaître. En effet, ξ^2, $\xi\eta$, $\zeta\xi$, étant des produits de deux dimensions, ne changent pas de signe quand on y change à la fois ceux de ξ, η, ζ; la valeur (1) de r^2 ne change pas non plus dans ces conditions, ni partant celle de r. Enfin ces produits sont nuls en même temps que ξ. Les sommes (6) sont donc les moitiés de sommes de même forme, mais où ξ, η, ζ peuvent recevoir toutes les valeurs comprises entre $\pm\infty$; sous cette condition, elles devront être remplacées par les suivantes :

$$\text{(7)}\qquad \tfrac{1}{2}S\xi^2 h\mathcal{A},\quad \tfrac{1}{2}S\xi\eta k\mathcal{A},\quad \tfrac{1}{2}S\zeta\xi l\mathcal{A}.$$

Le dénominateur commun des composantes de la force élastique est l'aire du parallélogramme générateur de côtés k, l, laquelle est, comme on sait, égale au produit de ses côtés par le sinus de l'angle inclus; donc, comme nous avons représenté par a le cosinus de l'angle des rangées k et l, le sinus sera $\sqrt{1 - a^2}$, et l'aire équivaudra à $kl\sqrt{1 - a^2}$. Les composantes de l'élasticité seront donc les quotients de (7) par

$kl\sqrt{1-a^2}$. Mais nous avons intérêt à remplacer de la manière suivante ce diviseur par un multiplicateur.

Soit (xh) l'angle aigu de la rangée h avec la normale au plan x; le volume du parallélépipède générateur sera égal à

$$V = kl\sqrt{1-a^2}.h\cos(xh); \tag{8}$$

et si nous désignons, comme à la Section I, la densité par ρ, nous aurons

$$m = \rho kl\sqrt{1-a^2}.h\cos(xh). \tag{9}$$

On en déduit

$$\frac{1}{kl\sqrt{1-a^2}} = \frac{\rho h\cos(xh)}{m}. \tag{10}$$

Par conséquent, exécuter la division indiquée sur (7) revient à multiplier ces quantités par le second membre de (10). On fera passer $\frac{h}{m}$ sous le signe sommatoire.

Représentons par E_L la force élastique sur un plan L, et par E_{Lu} sa composante parallèle à l'axe u; nous aurons, d'après ce qui précède, pour les composantes de la force élastique sur le plan des x (ou des rangées k, l) :

$$\left\{\begin{aligned} E_{xx} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos(xh)\,S\,\xi^2 h^2 \frac{\psi}{m},\\ E_{xy} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos(xh)\,S\,\xi\eta\, hk\frac{\psi}{m},\\ E_{xz} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos(xh)\,S\,\zeta\xi\, lh\frac{\psi}{m}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

4. Avec des axes de coordonnées convenablement choisis et une très légère modification, les formules (11) sont applicables à un plan quelconque, réticulaire ou non. Soit en effet L un plan quelconque passant par un centre O de molécule et Π un parallélépipède générateur de l'assemblage en O. On prolongera indéfiniment quatre arêtes parallèles de Π, de paramètre h, et l'on prendra pour axe des x celle qui passe en O. Les autres arêtes détermineront les extrémités des projections obliques des paramètres k et l sur le plan L; on prendra ces

projections respectives k' et l' pour les paramètres du réseau virtuel (nº 2), et elles serviront d'axes respectifs des y et des z. Les nouvelles coordonnées $\xi' h$, $\eta' k'$, $\zeta' l'$ des points inférieurs au plan L (c'est-à-dire intérieurs) seront déterminées en fonction des coordonnées ξh, ηk, ζl; en sorte que η' et ζ' seront égaux à η et ζ, mais que, excepté sur l'axe des x et quelques rangées tout à fait exceptionnelles (qui pourront même ne pas exister et ne devront pas exister en dehors d'une rangée virtuelle k' ou l', car autrement le plan serait réticulaire), ξ' sera une quantité fractionnaire ou même irrationnelle. Évidemment : 1° le parallélépipède de côtés h, k', l' parallèles aux axes directeurs sera équivalent au parallélépipède générateur, et l'on pourra y appliquer la formule (10) légèrement modifiée en écrivant

$$(12) \qquad \frac{1}{k' l' \sqrt{1 - a'^2}} = \frac{\rho h \cos(Lh)}{m};$$

2° les composantes des actions auront encore la forme (3) en y marquant d'un trait les quantités ξ, η, ζ, k, l, car $\mathcal{A}$ ne changera pas. Or les points qui ont mêmes valeurs de η' et ζ' sont situés sur une même rangée h parallèle à l'axe des x; pour trouver les valeurs de leurs différences $\xi - \xi'$, il faut projeter parallèlement au plan L les centres de cette rangée intérieure sur l'axe des x; ce qui fait qu'ils correspondent, à une quantité constante près pour la même rangée, aux centres mêmes de l'axe des x; donc, lorsqu'on ajoutera entre eux tous les termes ayant mêmes valeurs de ξ', η', ζ', il y en aura ξ, ξ étant le nombre correspondant de paramètres sur l'axe des x. Les calculs consécutifs seront les mêmes qu'au numéro précédent, et l'on trouvera, pour les composantes de la force élastique sur le plan non réticulaire L,

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} E_{Lx'} &= \tfrac{1}{2}\rho \cos(Lh)\, S\xi\xi' h^2 \frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{Ly'} &= \tfrac{1}{2}\rho \cos(Lh)\, S\xi\eta' h k' \frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{Lz'} &= \tfrac{1}{2}\rho \cos(Lh)\, S\xi\zeta' l' h \frac{\mathcal{A}}{m}. \end{aligned} \right.$$

Il y a lieu d'observer que ces calculs resteraient les mêmes quand le plan L serait un plan réticulaire différent de celui des rangées k et l.

5. *Les forces élastiques dans un corps mélangé se calculeront de la même manière que dans un corps pur.* Soient A, B; C, D; E, F; G, H les quatre groupes binaires de parcelles différentes, déterminés par les quatre rangées différentes h du parallélépipède octuple, dont la base détermine le plan réticulaire auquel correspond la force élastique à calculer. Prenons un sommet O de ce parallélépipède octuple pour origine des coordonnées, et les trois rangées h, k et l qui en sont issues pour axes respectifs des x, y, z, les formes (3) des actions moléculaires doivent éprouver quelques modifications. Désignons par $\mathfrak{M}_{nA}$, $\mathfrak{M}_{nB}$, $\mathfrak{M}_{nC}$, ... les capacités des parcelles A, B, C, ... pour les actions en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance et posons

$$(14) \qquad \mathcal{A} = \Sigma \frac{\pm \mathfrak{M}_{nu} f_n}{r^{n+1}}, \quad \mathcal{B} = \Sigma \frac{\pm \mathfrak{M}_{nu} \mathfrak{M}_{nv} f_n}{r^{n-1}},$$

u et v désignant l'une quelconque des parcelles A, B, C, ..., mais en désignant de différentes; les composantes de l'action d'une parcelle intérieure sur une parcelle extérieure de même nature seront en général

$$(\xi - \xi')h\mathcal{A}, \quad (\eta - \eta')k\mathcal{A}, \quad (\zeta - \zeta')l\mathcal{A};$$

et celles d'une parcelle intérieure, sur une parcelle extérieure de nature différente, seront

$$(\xi - \xi')h\mathcal{B}, \quad (\eta - \eta')k\mathcal{B}, \quad (\zeta - \zeta')l\mathcal{B}.$$

Les coefficients $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$, $\zeta - \zeta'$ représentant des nombres entiers, nous pourrons les remplacer par d'autres entiers, ξ, η, ζ. Nous devrons nous rappeler toutefois que, si la sommation est simple par rapport à $\eta - \eta'$ et $\zeta - \zeta'$ ou η et ζ, elle est double par rapport à ξ, en ce sens qu'elle se fait par rapport à ξ' et par rapport à ξ dans $\xi - \xi'$; mais nous allons exécuter immédiatement la première des deux. Nous distinguerons différents cas.

I. *Parcelles de même nature.* — Les expressions des composantes sont

$$(15) \qquad S\xi h\mathcal{A}, \quad S\eta k\mathcal{A}, \quad S\zeta l\mathcal{A},$$

et ξ, η, ζ sont forcément pairs, ainsi qu'on s'en rend aisément compte.

On voit facilement que, pour un même groupe de valeurs η, ζ, il y a une seule valeur de $\xi = 2$, deux de $\xi = 4$, trois de $\xi = 6$, et, en général, $\frac{i}{2}$ de $\xi = i$. Donc, si l'on réunit les valeurs identiques de manière à n'avoir plus à faire qu'une seule sommation par rapport à chacune des variables ξ, η, ζ, on aura les expressions suivantes, égales aux expressions (15):

$$\frac{1}{2}\mathrm{S}\xi^2 h\mathcal{A},\quad \frac{1}{2}\mathrm{S}\xi\eta k\mathcal{A},\quad \frac{1}{2}\mathrm{S}\zeta\xi l\mathcal{A}. \tag{16}$$

II. *Parcelles de nature différente appartenant à une même rangée h.* — Les formules des composantes sont ici

$$\mathrm{S}\xi h\mathcal{B},\quad \mathrm{S}\eta k\mathcal{B},\quad \mathrm{S}\zeta l\mathcal{B}. \tag{17}$$

On verra facilement que ξ reçoit toujours une valeur impaire; on se rendra compte également que l'ordre des parcelles, savoir si A est intérieure et B extérieure ou B intérieure et A extérieure, est indifférent, puisque l'on considère toujours l'action de la parcelle intérieure sur la parcelle extérieure. Cela posé, on trouvera une valeur de $\xi = 1$, trois de $\xi = 3$, et, en général, i de $\xi = i$. Les expressions (17) devront donc être remplacées par les suivantes, où il n'y aura plus qu'une sommation à faire par rapport à chacune des variables,

$$\mathrm{S}\xi^2 h\mathcal{B},\quad \mathrm{S}\xi\eta k\mathcal{B},\quad \mathrm{S}\zeta\xi l\mathcal{B}; \tag{18}$$

les variables η et k sont toujours paires dans le cas présent, parce que les deux parcelles appartiennent à une même rangée h.

III. *Parcelles de nature différente, situées sur des rangées h différentes.* — Les valeurs des composantes sont données par les formules (17), et en employant les mêmes raisonnements que dans le cas précédent, on arrivera aux formules (18); seulement ici ξ, η, ζ pourront offrir toutes les combinaisons possibles de parité et d'imparité.

Si l'on change ξ, η, ζ de signe, on retombe sur une parcelle de même nature, car les projections de la distance à la première parcelle seront 2ξ, 2η, 2ζ, paires par conséquent; l'ancienne et la nouvelle parcelle ont donc les mêmes conditions de parité et d'imparité, ce qui caractérise l'identité des parcelles dans les mélanges que nous considérons.

Donc, ce changement de signe n'affecte pas la valeur de $\mathfrak{B}$; il n'affecte pas d'ailleurs celle des coefficients ξ^2, $\xi\eta$, $\zeta\xi$; on peut donc remplacer les expressions (16) et (18) par la moitié d'expressions semblables où la sommation de ξ doit, comme celle de η et ζ, être faite entre $\pm\infty$.

Les numérateurs des composantes de la force élastique seront formés par la réunion de toutes ces composantes partielles. Indiquons leur réunion par le signe sommatoire $\mathfrak{S}$, et mettons en dehors le facteur $\frac{1}{2}$ que nous venons de voir répondre aux sommations de ξ entre $\pm\infty$, nous trouverons les expressions suivantes des numérateurs des composantes élastiques :

$$(19)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi^2 h\mathfrak{A} + \mathrm{S}\,\xi^2 h\mathfrak{B}\right), \\ \frac{1}{2}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi\eta k\mathfrak{A} + \mathrm{S}\,\xi\eta k\mathfrak{B}\right), \\ \frac{1}{2}\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\mathrm{S}\,\zeta\xi l\mathfrak{A} + \mathrm{S}\,\zeta\xi l\mathfrak{B}\right). \end{cases}$$

Il reste à diviser ces composantes par le quadruple d'un parallélogramme générateur, soit $4kl\sqrt{1-a^2}$, pour avoir les composantes de la force élastique. Or, en posant

$$(20)\qquad \mathrm{M} = \mathfrak{M}_{\mathrm{A}} + \mathfrak{M}_{\mathrm{B}} + \ldots + \mathfrak{M}_{\mathrm{H}},$$

on a, en répétant des calculs semblables à ceux desquels on a déduit la formule (10),

$$(21)\qquad \frac{1}{4kl\sqrt{1-a^2}} = \frac{\rho.2h\cos(xh)}{\mathrm{M}};$$

par conséquent, il suffira de multiplier les expressions (19) par le second membre de (21) pour obtenir les composantes de la force élastique; elles seront

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}_{xx} = \frac{1}{2}\rho\cos(xh)\,\mathfrak{S}\left(\mathrm{S}\,\xi^2 h^2\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{M}} + 2\,\mathrm{S}\,\xi^2 h^2\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{M}}\right), \\ \mathrm{E}_{xy} = \frac{1}{2}\rho\cos(xh)\,\mathfrak{S}\left(\mathrm{S}\,\xi\eta\, hk\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{M}} + 2\,\mathrm{S}\,\xi\eta\, hk\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{M}}\right), \\ \mathrm{E}_{xz} = \frac{1}{2}\rho\cos(xh)\,\mathfrak{S}\left(\mathrm{S}\,\zeta\xi\, lh\frac{\mathfrak{A}}{\mathrm{M}} + 2\,\mathrm{S}\,\zeta\xi\, lh\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{M}}\right). \end{cases}$$

Les rapports des équations (11) et (22) sont évidents; il est visible aussi que, en procédant comme au n° 4, on trouverait, pour les corps mélangés, une expression des forces élastiques sur un plan n'apparte-

nant pas à l'assemblage, laquelle serait analogue à celle des formules (13).

Tous les calculs sur ξ, η, ζ qu'on pourra faire avec les formules (11) pourront l'être également avec les formules (22). Nous profiterons de cette observation pour étendre aux formules (22) les déductions que nous allons, au moyen de calculs plus rapides, tirer des formules (11).

6. Il est évident que les composantes des forces élastiques sur les deux autres plans réticulaires conjugués, déterminés par les rangées l et h, h et k se déduiront, par une simple permutation de lettres, des formules qui donnent les composantes sur le plan h (celui des rangées k et l). Pour un corps pur, on les déduira des formules (11); elles seront, pour le plan k (celui des rangées l et h),

$$(23)\quad \begin{cases} E_{yx} = \frac{1}{2}\rho\cos(yk)\,S\xi\eta\,hk\,\frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{yy} = \frac{1}{2}\rho\cos(yk)\,S\eta^2k^2\,\frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{yz} = \frac{1}{2}\rho\cos(yk)\,S\eta\zeta\,kl\,\frac{\mathcal{A}}{m}; \end{cases}$$

et, sur le plan l (celui des rangées h et k),

$$(24)\quad \begin{cases} E_{zx} = \frac{1}{2}\rho\cos(zl)\,S\zeta\xi\,lh\,\frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{zy} = \frac{1}{2}\rho\cos(zl)\,S\eta\zeta\,kl\,\frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{zz} = \frac{1}{2}\rho\cos(zl)\,S\zeta^2l^2\,\frac{\mathcal{A}}{m}. \end{cases}$$

On ne doit pas oublier que, dans les formules (11), (23), (24), la lettre x, ou y, ou z, mise dans l'expression de l'angle, y indique la normale au plan.

La comparaison des équations (11), (23), (24), où les sommes sont prises par rapport aux mêmes variables et entre les mêmes limites, donne immédiatement les relations suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} \cos(yk)\,E_{xy} = \cos(xh)\,E_{yx}, \\ \cos(zl)\,E_{yz} = \cos(yk)\,E_{zy}, \\ \cos(xh)\,E_{zx} = \cos(zl)\,E_{xz} \end{cases}$$



et

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\cos(xh)}E_{xx}+\frac{1}{\cos(yk)}E_{yy}+\frac{1}{\cos(zl)}E_{zz}\\ &\quad+\frac{2a}{\cos(yk)}E_{yz}+\frac{2b}{\cos(zl)}E_{zx}+\frac{2c}{\cos(xh)}E_{xy}\\ &=\tfrac{1}{2}\rho\,S\Sigma\frac{\pm m_n^2 f_n}{mr^{n-1}}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (25) sont applicables sans changement aux corps mélangés; quant à l'équation (26), elle y devient

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\cos(xh)}E_{xx}+\frac{1}{\cos(yk)}E_{yy}+\frac{1}{\cos(zl)}E_{zz}\\ &\quad+\frac{2a}{\cos(yk)}E_{yz}+\frac{2b}{\cos(zl)}E_{zx}+\frac{2c}{(\cos xh)}E_{xy}\\ &=\tfrac{1}{2}\rho\,8\left(S\Sigma\frac{\pm \mathfrak{M}_{nA}^2 f_n}{Mr^{n-1}}+2\,S\Sigma\frac{\pm \mathfrak{M}_{nA}\mathfrak{M}_{nB} f_n}{Mr^{n-1}}\right).\end{aligned}\right.$$

7. Si le parallélépipède générateur dont on a pris les côtés pour axes était rectangulaire, les angles des axes entre eux seraient droits, d'où l'on aurait

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0;$$

les angles des axes coordonnés ou rangées directrices avec les normales aux plans coordonnés seraient nuls; d'où

$$\cos(xh)=1,\quad \cos(yk)=1,\quad \cos(zl)=1.$$

Par suite, l'expression (1) de la distance deviendrait

$$(28)\qquad r^2=\xi^2h^2+\eta^2k^2+\zeta^2l^2.$$

Donc, pour chaque valeur de ξ, il y aurait des groupes de deux centres opposés $+\eta_1$, $+\zeta_1$ et $-\eta_1-\zeta_1$ qui donneraient une même valeur de r avec des valeurs égales et de signes opposés pour $\xi\eta$, $\zeta\xi$. Donc E_{xy} et E_{xz} sont nulles, comme formées de valeurs égales deux à deux et de signes contraires. Pareille chose a lieu pour le plan des y et pour celui des z; il s'ensuit que les composantes tangentielles [1] E_{xy}, E_{xz},

[1] C'est-à-dire situées dans le plan. J'emploierai à l'avenir cette expression, empruntée à Lamé, qui s'en sert dans ses *Leçons sur la théorie de l'élasticité*.

E_{yz}, E_{yx}, E_{zx}, E_{zy} sont nulles et que les forces élastiques se réduisent à leurs composantes normales, dont nous garderons seulement le premier indice. Dans ce cas spécial, les équations (25) s'annulent et l'équation (26) devient

$$E_x + E_y + E_z = \tfrac{1}{2}\,\rho\,S\,\Sigma\,\frac{\pm m_n^2 f_n}{m r^{n-1}}. \tag{29}$$

Enfin, si le parallélépipède générateur est un cube, les forces élastiques sont visiblement égales sur les trois faces, et l'équation (29) devient, en y supprimant l'indice qui n'a plus de raison d'être,

$$E = \tfrac{1}{6}\,\rho\,S\,\Sigma\,\frac{\pm m_n^2 f_n}{m r^{n-1}}. \tag{30}$$

Les équations relatives aux mélanges peuvent subir des réductions semblables.

8. Cherchons actuellement, en fonction des composantes (11), (23), (24), les composantes parallèles aux x, y, z de la force élastique relative à un plan quelconque passant par le point O. Nous supposerons d'abord qu'il s'agit seulement d'un plan réticulaire de l'assemblage, et nous désignerons par a, b, c les cosinus que la normale à ce plan L, aussi appelée normale L, fait respectivement avec les axes des x, y, z.

Le plan réticulaire L peut être censé former, avec deux autres plans réticulaires conjugués, un nouveau système d'axes conjugués x', y', z' dont il serait le plan x'; les composantes de la force élastique sur ce plan parallèlement aux x', y', z' seraient donc données par les formules (11), où il suffirait de marquer d'un trait les paramètres et leurs coefficients; elles seraient par conséquent

$$\left\{\begin{aligned} E_{x'x'} &= \tfrac{1}{2}\,\rho\cos(x'h')\,S\,\xi'^2 h'^2\,\frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{x'y'} &= \tfrac{1}{2}\,\rho\cos(x'h')\,S\,\xi'\eta' h'k'\,\frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{x'z'} &= \tfrac{1}{2}\,\rho\cos(x'h')\,S\,\xi'\zeta' l'h'\,\frac{\mathcal{A}}{m}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Les valeurs $\mathcal{A}$ n'ont pas reçu d'accents, parce qu'elles sont indépendantes du choix des rangées directrices.

Remplaçons la caractéristique x' du plan par L et reportons-nous au n° **12** de la section I; reprenons les raisonnements qui y sont faits pour la transformation des coordonnées et appliquons-les à la transformation des composantes : nous trouverons que les composantes $E_{x'}$ parallèles aux axes des x, y, z sont données par les relations suivantes :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} E_{Lx} &= \frac{\xi_1 h}{h'} E_{Lx'} + \frac{\xi_2 h}{k'} E_{Ly'} + \frac{\xi_3 h}{l'} E_{Lz'},\\ E_{Ly} &= \frac{\eta_1 k}{h'} E_{Lx'} + \frac{\eta_2 k}{k'} E_{Ly'} + \frac{\eta_3 k}{l'} E_{Lz'},\\ E_{Lz} &= \frac{\zeta_1 l}{h'} E_{Lx'} + \frac{\zeta_2 l}{k'} E_{Ly'} + \frac{\zeta_3 l}{l'} E_{Lz'}.\end{aligned}\right.$$

Remplaçons actuellement, dans les seconds membres, les composantes élastiques par leurs valeurs (31) et faisons entrer les coefficients des forces élastiques sous le signe sommatoire, ce qui est permis; nous aurons, pour les coefficients de $\frac{\mathcal{A}}{m}$,

Dans E_{Lx}..... $\xi' h'(\xi_1 \xi' + \xi_2 \eta' + \xi_3 \zeta') h = (\xi'_1 \xi + \xi'_2 \eta + \xi'_3 \zeta) h' \xi h$,
Dans E_{Ly}..... $\xi' h'(\eta_1 \xi' + \eta_2 \eta' + \eta_3 \zeta') k = (\xi'_1 \xi + \xi'_2 \eta + \xi'_3 \zeta) h' \eta k$,
Dans E_{Lz}..... $\xi' h'(\zeta_1 \xi' + \zeta_2 \eta' + \zeta_3 \zeta') l = (\xi'_1 \xi + \xi'_2 \eta + \xi'_3 \zeta) h' \zeta l$,

en vertu des équations (11) et (9) de la première Section. En mettant ces nouvelles expressions sous les signes sommatoires, puis éliminant les formes sommatoires au moyen des équations (11), (23) et (24), nous trouverons

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} E_{Lx} &= \frac{\xi'_1 h'}{h}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(xh)} E_{xx} + \frac{\xi'_2 h'}{k}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(yk)} E_{yx} + \frac{\xi'_3 h'}{l}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(zl)} E_{zx},\\ E_{Ly} &= \frac{\xi'_1 h'}{h}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(xh)} E_{xy} + \frac{\xi'_2 h'}{k}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(yk)} E_{yy} + \frac{\xi'_3 h'}{l}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(zl)} E_{zy},\\ E_{Lz} &= \frac{\xi'_1 h'}{h}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(xh)} E_{xz} + \frac{\xi'_2 h'}{k}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(yk)} E_{yz} + \frac{\xi'_3 h'}{l}\,\frac{\cos(x'h')}{\cos(zl)} E_{zz}.\end{aligned}\right.$$

Or on voit facilement que

$$(34)\quad \xi'_1 h' \cos(x'h') = h\mathrm{a},\quad \xi'_2 h' \cos(x'h') = k\mathrm{b},\quad \xi'_3 h' \cos(x'h') = l\mathrm{c};$$

car $\xi'_1 h'$, $\xi'_2 h'$, $\xi'_3 h'$ sont les projections respectives dans le système des axes x', y', z' des paramètres h, k, l sur l'axe des x' (voyez le n° **12**,

Sect. I), et ces projections, multipliées par $\cos(x'h')$, sont les projections des mêmes paramètres sur la normale au plan L, puisque cette normale est perpendiculaire aux autres projections. Or les seconds membres (34) sont les projections directes de h, k, l sur la normale L.

Les équations (33) deviennent donc définitivement

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} E_{Lx} &= \frac{a}{\cos(xh)}E_{xx} + \frac{b}{\cos(yk)}E_{yx} + \frac{c}{\cos(zl)}E_{zx}, \\ E_{Ly} &= \frac{a}{\cos(xh)}E_{xy} + \frac{b}{\cos(yk)}E_{yy} + \frac{c}{\cos(zl)}E_{zy}, \\ E_{Lz} &= \frac{a}{\cos(xh)}E_{xz} + \frac{b}{\cos(yk)}E_{yz} + \frac{c}{\cos(zl)}E_{zz}. \end{aligned}\right.$$

Si nous nous reportions au second cas, celui du plan non réticulaire traité au n° **4**, nous verrions que les raisonnements demeureraient les mêmes, les calculs aussi, et qu'on retomberait sur les formules (35); il est inutile d'entrer dans de plus grands développements. Les équations (13) peuvent même conduire aux formules (35) en y supposant que le plan L est un plan réticulaire quelconque en dehors des rangées directrices; nous reviendrons dans la section V sur cette dernière manière d'envisager la question.

Nous sommes donc autorisés à poser en principe que les équations (35) lient aux composantes élastiques, sur trois plans conjugués donnés, les composantes élastiques relatives à tout plan passant par l'origine, qu'il soit réticulaire ou non, et cela pour tout corps régulièrement distribué, pur ou mélangé. Mais, tout en ne dépendant plus des paramètres, les équations comportent une dernière trace de l'assemblage, savoir que les plans x, y, z soient conjugués. Nous allons chercher des relations qui en soient complètement exemptes; mais nous examinerons auparavant deux cas particuliers de ces équations.

9. Si les trois plans coordonnés (et en même temps conjugués) sont les faces indéfiniment prolongées d'un parallélépipède générateur rectangulaire, les cosinus des angles (xh), (yk), (zl) deviendront égaux à l'unité, et les composantes tangentielles seront nulles (n° **7**). Les équations (35) se ramèneront donc à la forme très simple

$$(36)\quad E_{Lx} = a E_x,\quad E_{Ly} = b E_y,\quad E_{Lz} = c E_z.$$



Enfin, si le parallélépipède générateur est un cube, elles deviendront

$$(37) \qquad E_{L,x} = aE, \quad E_{L,y} = bE, \quad E_{L,z} = cE;$$

d'où l'on conclut que

$$(38) \qquad E_L = E$$

et est perpendiculaire au plan L. Donc, dans tout assemblage où il y a un parallélépipède générateur de forme cubique, la force élastique est constante et normale à tous les plans, ce qui constitue le fait connu sous le nom de *principe de Pascal*. Réciproquement, dans tout assemblage où le principe de Pascal existe, il faut qu'il y ait, soit dans cet assemblage, soit dans un autre donnant la même répartition de forces élastiques, un parallélépipède générateur qui soit un cube. Toutefois l'orientation de ce cube est complètement indéterminée.

Ces conclusions supposent les molécules concentrées en leurs centres de gravité. Dans le cas général où une telle hypothèse est inadmissible, les conditions de l'existence du principe de Pascal sont plus compliquées et se rapportent seulement aux forces élastiques moyennes.

10. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un nouveau système d'axes qu'on supposera rectangulaire, et en même temps les désignations des plans directeurs auxquels ces coordonnées sont perpendiculaires. On se propose de déterminer les composantes rectangulaires des forces élastiques sur chaque plan x, y ou z, au moyen de celles que l'on connaît sur les plans conjugués.

On commencera par disposer convenablement les formules (35) en y remplaçant a, b, c par leurs valeurs respectives $\cos(Lx)$, $\cos(Ly)$, $\cos(Lz)$. Cela fait, si nous considérons le plan x_1, nous remplacerons, dans les formules dont il s'agit, L par x_1, et les formules (35) nous donneront immédiatement les composantes de E_{x_1} parallèlement aux x, y, z; elles seront

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} E_{x_1 x} &= \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)} E_{xx} + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)} E_{yx} + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)} E_{zx}, \\ E_{x_1 y} &= \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)} E_{xy} + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)} E_{yy} + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)} E_{zy}, \\ E_{x_1 z} &= \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)} E_{xz} + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)} E_{yz} + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)} E_{zz}. \end{aligned} \right.$$

On en déduit immédiatement les composantes de E_{x_1} parallèlement aux axes x_1, y_1, z_1 par les formules de la composition des forces; elles sont :

$$
\tag{40}
\left\{
\begin{aligned}
E_{x_1x_1} = {} & \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)}\left[E_{xx}\cos(xx_1) + E_{xy}\cos(yx_1) + E_{xz}\cos(zx_1)\right] \\
& + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)}\left[E_{yx}\cos(xx_1) + E_{yy}\cos(yx_1) + E_{yz}\cos(zx_1)\right] \\
& + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)}\left[E_{zx}\cos(xx_1) + E_{zy}\cos(yx_1) + E_{zz}\cos(zx_1)\right], \\
E_{x_1y_1} = {} & \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)}\left[E_{xx}\cos(xy_1) + E_{xy}\cos(yy_1) + E_{xz}\cos(zy_1)\right] \\
& + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)}\left[E_{yx}\cos(xy_1) + E_{yy}\cos(yy_1) + E_{yz}\cos(zy_1)\right] \\
& + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)}\left[E_{zx}\cos(xy_1) + E_{zy}\cos(yy_1) + E_{zz}\cos(zy_1)\right], \\
E_{x_1z_1} = {} & \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)}\left[E_{xx}\cos(xz_1) + E_{xy}\cos(yz_1) + E_{xz}\cos(zz_1)\right] \\
& + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)}\left[E_{yx}\cos(xz_1) + E_{yy}\cos(yz_1) + E_{yz}\cos(zz_1)\right] \\
& + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)}\left[E_{zx}\cos(xz_1) + E_{zy}\cos(yz_1) + E_{zz}\cos(zz_1)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

On aura de même, pour les composantes de la force élastique sur le plan y_1,

$$
\tag{41}
\left\{
\begin{aligned}
E_{y_1x_1} = {} & \frac{\cos(xy_1)}{\cos(xh)}\left[E_{xx}\cos(xx_1) + E_{xy}\cos(yx_1) + E_{xz}\cos(zx_1)\right] \\
& + \frac{\cos(yy_1)}{\cos(yk)}\left[E_{yx}\cos(xx_1) + E_{yy}\cos(yx_1) + E_{yz}\cos(zx_1)\right] \\
& + \frac{\cos(zy_1)}{\cos(zl)}\left[E_{zx}\cos(xx_1) + E_{zy}\cos(yx_1) + E_{zz}\cos(zx_1)\right], \\
E_{y_1y_1} = {} & \frac{\cos(xy_1)}{\cos(xh)}\left[E_{xx}\cos(xy_1) + E_{xy}\cos(yy_1) + E_{xz}\cos(zy_1)\right] \\
& + \frac{\cos(yy_1)}{\cos(yk)}\left[E_{yx}\cos(xy_1) + E_{yy}\cos(yy_1) + E_{yz}\cos(zy_1)\right] \\
& + \frac{\cos(zy_1)}{\cos(zl)}\left[E_{zx}\cos(xy_1) + E_{zy}\cos(yy_1) + E_{zz}\cos(zy_1)\right], \\
E_{y_1z_1} = {} & \frac{\cos(xy_1)}{\cos(xh)}\left[E_{xx}\cos(xz_1) + E_{xy}\cos(yz_1) + E_{xz}\cos(zz_1)\right] \\
& + \frac{\cos(yy_1)}{\cos(yk)}\left[E_{yx}\cos(xz_1) + E_{yy}\cos(yz_1) + E_{yz}\cos(zz_1)\right] \\
& + \frac{\cos(zy_1)}{\cos(zl)}\left[E_{zx}\cos(xz_1) + E_{zy}\cos(yz_1) + E_{zz}\cos(zz_1)\right]
\end{aligned}
\right.
$$

et, pour les composantes sur le plan z_1,

$$(42)\quad \begin{cases} E_{z_1 x_1} = \dfrac{\cos(xz_1)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xx_1) + E_{xy}\cos(yx_1) + E_{xz}\cos(zx_1)] \\ \qquad + \dfrac{\cos(yz_1)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xx_1) + E_{yy}\cos(yx_1) + E_{yz}\cos(zx_1)] \\ \qquad + \dfrac{\cos(zz_1)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xx_1) + E_{zy}\cos(yx_1) + E_{zz}\cos(zx_1)], \\ E_{z_1 y_1} = \dfrac{\cos(xz_1)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xy_1) + E_{xy}\cos(yy_1) + E_{xz}\cos(zy_1)] \\ \qquad + \dfrac{\cos(yz_1)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xy_1) + E_{yy}\cos(yy_1) + E_{yz}\cos(zy_1)] \\ \qquad + \dfrac{\cos(zz_1)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xy_1) + E_{zy}\cos(yy_1) + E_{zz}\cos(zy_1)], \\ E_{z_1 z_1} = \dfrac{\cos(xz_1)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xz_1) + E_{xy}\cos(yz_1) + E_{xz}\cos(zz_1)] \\ \qquad + \dfrac{\cos(yz_1)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xz_1) + E_{yy}\cos(yz_1) + E_{yz}\cos(zz_1)] \\ \qquad + \dfrac{\cos(zz_1)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xz_1) + E_{zy}\cos(yz_1) + E_{zz}\cos(zz_1)]. \end{cases}$$

11. La comparaison de ces formules entre elles donne immédiatement les équations suivantes, que Lamé avait obtenues par des considérations mécaniques [1] :

$$(43)\qquad E_{x_1 y_1} = E_{y_1 x_1}, \quad E_{y_1 z_1} = E_{z_1 y_1}, \quad E_{z_1 x_1} = E_{x_1 z_1};$$

c'est-à-dire que les composantes tangentielles de mêmes indices sont égales entre elles, quel que soit l'ordre des indices. On voit en effet que, dans les valeurs ci-dessus de ces composantes tangentielles, E_{xx}, E_{yy}, E_{zz} ont les mêmes coefficients trigonométriques. Quant aux composantes tangentielles E_{xy}, E_{xz}, ..., on peut les permuter au moyen des équations (25), de manière que $E_{x_1 y_1}$ et $E_{y_1 x_1}$, par exemple, soient composées des mêmes termes. Ainsi l'on peut remplacer dans la seconde relation (40), qui donne $E_{x_1 y_1}$, les deux termes

$$\frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)} E_{xy}\cos(yy_1) + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)} E_{yx}\cos(xy_1)$$

[1] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, déjà citées, p. 17, avec d'autres notations.

par les deux autres

$$\frac{\cos(xy_1)}{\cos(xh)} E_{xy} \cos(yx_1) + \frac{\cos(yy_1)}{\cos(yk)} E_{yx} \cos(xx_1),$$

qui appartiennent à $E_{y_1 x_1}$, et ainsi de suite. De même pour les autres composantes tangentielles.

On trouvera encore aisément, en additionnant entre elles les trois composantes normales, puis se servant de formules trigonométriques connues sur la composition des angles et des relations (25), avec un corps pur,

$$(44) \qquad E_{x_1 x_1} + E_{y_1 y_1} + E_{z_1 z_1} = \tfrac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm m_n^2 f_n}{m r^{n-1}}:$$

et avec un corps mélangé,

$$(45) \qquad E_{x_1 x_1} + E_{y_1 y_1} + E_{z_1 z_1} = \tfrac{1}{2}\rho S\left(S\Sigma \frac{\pm \mathfrak{M}_{nA}^2 f_n}{M r^{n-1}} + 2 S\Sigma \frac{\pm \mathfrak{M}_{nA}\mathfrak{M}_{nB} f_n}{M r^{n-1}}\right).$$

12. Les équations (40), (41), (42) peuvent être représentées par des formules très simples qui seront utiles par la suite.

Rapportons les coordonnées de centres de molécule ou parcelle aux coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1 et posons

$$(46) \qquad \begin{cases} \Delta x_1 = \xi h \cos(xx_1) + \eta k \cos(yx_1) + \zeta l \cos(zx_1), \\ \Delta y_1 = \xi h \cos(xy_1) + \eta k \cos(yy_1) + \zeta l \cos(zy_1), \\ \Delta z_1 = \xi h \cos(xz_1) + \eta k \cos(yz_1) + \zeta l \cos(zz_1). \end{cases}$$

La partie comprise dans la première ligne de $E_{x_1 y_1}$ (40) est, en y remplaçant les composantes des forces élastiques par leurs valeurs tirées des relations (11), (23) et (24),

$$\tfrac{1}{2}\rho \cos(xx_1) S[\xi^2 h^2 \cos(xy_1) + \xi\eta hk \cos(yy_1) + \zeta\xi lh \cos(zy_1)] \frac{\mathfrak{H}}{m}$$
$$= \tfrac{1}{2}\rho \cos(xx_1) S \xi h \,\Delta y_1 \frac{\mathfrak{H}}{m},$$

en vertu de la seconde équation (46). De même, la partie comprise dans la seconde ligne de $E_{x_1 y_1}$ sera

$$\tfrac{1}{2}\rho \cos(yx_1) S \eta k \,\Delta y_1 \frac{\mathfrak{H}}{m},$$

et la partie comprise dans la troisième ligne sera

$$\tfrac{1}{2}\rho\cos(zx_1)\,\mathrm{S}\,\zeta l\,\Delta y_1\,\frac{\mathcal{M}}{m}.$$

On a donc, en substituant ces expressions dans la seconde (40),

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{x_1y_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}[\xi h\cos(xx_1)+\eta k\cos(yx_1)+\zeta l\cos(zx_1)]\,\Delta y_1\,\frac{\mathcal{M}}{m}\\ &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta x_1\,\Delta y_1\,\frac{\mathcal{M}}{m},\end{aligned}$$

en vertu de la première (46). Les autres composantes, traitées de la même manière, donneraient des résultats analogues, en sorte qu'on peut écrire les formules très simples

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{E}_{x_1x_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta x_1\,\Delta x_1\,\frac{\mathcal{M}}{m},\\ \mathrm{E}_{y_1y_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta y_1\,\Delta y_1\,\frac{\mathcal{M}}{m},\\ \mathrm{E}_{z_1z_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta z_1\,\Delta z_1\,\frac{\mathcal{M}}{m};\\ \mathrm{E}_{x_1y_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta x_1\,\Delta y_1\,\frac{\mathcal{M}}{m},\\ \mathrm{E}_{y_1z_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta y_1\,\Delta z_1\,\frac{\mathcal{M}}{m},\\ \mathrm{E}_{z_1x_1} &= \tfrac{1}{2}\rho\,\mathrm{S}\,\Delta z_1\,\Delta x_1\,\frac{\mathcal{M}}{m}.\end{aligned}\right.$$

Le calcul qui sert à les établir fournit une seconde démonstration des équations (43).

Les corps mélangés conduiraient à des formules analogues aux équations (46). Il est inutile d'en développer les calculs tant ils ressemblent à ceux que nous avons donnés. On a d'ailleurs peu de motifs pour les mettre en lumière, car les mélanges de corps monoatomiques sont encore plus rares que ces derniers, et c'est pour ces mélanges seulement que les formules seraient valables, ainsi que nous l'expliquerons à la Section III.

13. Il s'agit actuellement de trouver, sur un plan quelconque passant par l'origine, les composantes de la force élastique parallèle aux

x_1, y_1, z_1. En désignant ce plan comme précédemment par L, et recourant aux équations (35), où je remplacerai a, b, c par les cosinus que ces lettres désignent, je trouve immédiatement, au moyen des formules connues de la composition des forces,

$$
(48)\quad \left\{
\begin{aligned}
E_{L.x_1} = {} & \frac{\cos(Lx)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xx_1) + E_{xy}\cos(yx_1) + E_{xz}\cos(zx_1)] \\
& + \frac{\cos(Ly)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xx_1) + E_{yy}\cos(yx_1) + E_{yz}\cos(zx_1)] \\
& + \frac{\cos(Lz)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xx_1) + E_{zy}\cos(yx_1) + E_{zz}\cos(zx_1)], \\
E_{L.y_1} = {} & \frac{\cos(Lx)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xy_1) + E_{xy}\cos(yy_1) + E_{xz}\cos(zy_1)] \\
& + \frac{\cos(Ly)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xy_1) + E_{yy}\cos(yy_1) + E_{yz}\cos(zy_1)] \\
& + \frac{\cos(Lz)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xy_1) + E_{zy}\cos(yy_1) + E_{zz}\cos(zy_1)], \\
E_{L.z_1} = {} & \frac{\cos(Lx)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xz_1) + E_{xy}\cos(yz_1) + E_{xz}\cos(zz_1)] \\
& + \frac{\cos(Ly)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xz_1) + E_{yy}\cos(yz_1) + E_{yz}\cos(zz_1)] \\
& + \frac{\cos(Lz)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xz_1) + E_{zy}\cos(yz_1) + E_{zz}\cos(zz_1)].
\end{aligned}
\right.
$$

Considérons la première des équations (48) et substituons aux cosinus de (Lx), (Ly), (Lz) leurs valeurs tirées de la formule

$$\cos(uv) = \cos(ux_1)\cos(vx_1) + \cos(uy_1)\cos(vy_1) + \cos(uz_1)\cos(vz_1),$$

et nous verrons que le coefficient de $\cos(Lx_1)$ sera

$$
\begin{aligned}
& \frac{\cos(xx_1)}{\cos(xh)}[E_{xx}\cos(xx_1) + E_{xy}\cos(yx_1) + E_{xz}\cos(zx_1)] \\
& + \frac{\cos(yx_1)}{\cos(yk)}[E_{yx}\cos(xx_1) + E_{yy}\cos(yx_1) + E_{yz}\cos(zx_1)] \\
& + \frac{\cos(zx_1)}{\cos(zl)}[E_{zx}\cos(xx_1) + E_{zy}\cos(yx_1) + E_{zz}\cos(zx_1)] \\
& = E_{x_1x_1},
\end{aligned}
$$

d'après la première (40). Nous verrons de même que le coefficient de

$\cos(Ly_1)$ sera $E_{y_1x_1}$ ou $E_{x_1y_1}$, et celui de $\cos(Lz_1)$, $E_{x_1z_1}$ ou $E_{z_1x_1}$. Les valeurs de E_{Ly_1} et E_{Lz_1} donneront lieu à des réductions semblables, en sorte qu'on pourra remplacer les équations (48) par les trois suivantes :

$$(49)\quad \begin{cases} E_{Lx_1} = E_{x_1x_1}\cos(Lx_1) + E_{x_1y_1}\cos(Ly_1) + E_{z_1x_1}\cos(Lz_1), \\ E_{Ly_1} = E_{x_1y_1}\cos(Lx_1) + E_{y_1y_1}\cos(Ly_1) + E_{y_1z_1}\cos(Lz_1), \\ E_{Lz_1} = E_{z_1x_1}\cos(Lx_1) + E_{y_1z_1}\cos(Ly_1) + E_{z_1z_1}\cos(Lz_1). \end{cases}$$

Comme les équations (35), d'où on les a déduites, les équations (49) sont applicables aux corps mélangés aussi bien qu'aux corps purs; elles ont sur les premières l'avantage de ne plus garder aucune trace des assemblages et de dépendre seulement des forces élastiques sur trois plans perpendiculaires entre eux, forces qui peuvent être déterminées expérimentalement.

Prenons les *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité* (1) de Lamé, et nous y verrons que les équations (2) de la page 17 et (8) de la page 20, qu'il déduit de considérations mécaniques, sont, aux signes représentatifs près, les mêmes que les équations (43) et (49). Donc, sans qu'il soit nécessaire de reprendre les calculs de Lamé ou d'autres équivalents, on peut considérer comme acquis à la théorie des corps mono-atomiques les résultats nombreux que ce géomètre déduit des équations dont il s'agit. Je ne peux que renvoyer à son Ouvrage les lecteurs désireux de les connaître. Ils sont sans utilité pour le reste de ce travail.

---

(1) Paris, Bachelier, 1852. Déjà citées plusieurs fois.

SECTION III.

FORCES ÉLASTIQUES. — NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS.

---

§ I. — Approximations.

1. Nous avons donné, dans la Section II, les propriétés et les expressions générales des forces élastiques dans le cas où l'on peut négliger les dimensions de la molécule; il s'agit de trouver maintenant les moyens de calculer ces forces élastiques et de reconnaître les conditions qu'elles impliquent pour pouvoir être, comme on l'a admis dans l'hypothèse fondamentale, fonctions d'actions très grandes aux distances insensibles et insensibles aux distances appréciables. Il n'est pas nécessaire, pour atteindre ce but, de prendre l'expression la plus générale des forces élastiques; il suffit de considérer le cas plus simple des forces élastiques sur les faces d'un parallélépipède générateur rectangulaire; ce qu'on en conclura pour les grandeurs des exposants n sera visiblement applicable à toutes les forces élastiques.

Soit donc à effectuer les sommations indiquées dans les formules suivantes, qu'on déduit des considérations du n° 7, Section II :

(1)
$$\left\{\begin{aligned} E_x &= \tfrac{1}{2}\rho\, S\, \xi^2 h^2 \frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_y &= \tfrac{1}{2}\rho\, S\, \eta^2 k^2 \frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_z &= \tfrac{1}{2}\rho\, S\, \zeta^2 l^2 \frac{\mathcal{A}}{m}, \end{aligned}\right.$$

où

(2)
$$r^2 = \xi^2 h^2 + \eta^2 k^2 + \zeta^2 l^2$$

et

$$(3) \qquad \mathcal{A} = \Sigma \frac{\pm m_n^2 f_n}{r^{n+1}},$$

en même temps que ξ, η, ζ reçoivent toutes les valeurs entières possibles comprises entre $\pm\infty$.

Représentons par ε une grandeur du premier ordre, servant d'étalon, et posons

$$(4) \qquad h = \varepsilon h', \quad k = \varepsilon k', \quad l = \varepsilon l', \quad r = \varepsilon r'.$$

Considérons ensuite à part les différents termes qui composent l'action moléculaire; nous aurons, pour un des éléments de cette action,

$$\pm S \frac{\xi^2 h^2}{r^{n+1}} \frac{m_n^2 f_n}{m} = \pm \frac{m_n^2 f_n}{m \varepsilon^{n-1}} S \frac{\xi^2 h'^2}{r'^{n+1}},$$

$$\pm S \frac{\eta^2 k^2}{r^{n+1}} \frac{m_n^2 f_n}{m} = \pm \frac{m_n^2 f_n}{m \varepsilon^{n-1}} S \frac{\eta^2 k'^2}{r'^{n+1}},$$

$$\pm S \frac{\zeta^2 l^2}{r^{n+1}} \frac{m_n^2 f_n}{m} = \pm \frac{m_n^2 f_n}{m \varepsilon^{n-1}} S \frac{\zeta^2 l'^2}{r'^{n+1}};$$

et nous écrirons, pour abréger,

$$(5) \qquad X_n = S \frac{\xi^2 h'^2}{r'^{n+1}}, \quad Y_n = S \frac{\eta^2 k'^2}{r'^{n+1}}, \quad Z_n = S \frac{\zeta^2 l'^2}{r'^{n+1}};$$

il s'agit de trouver des formules permettant d'évaluer X_n, Y_n, Z_n.

2. L'une des séries les plus commodes pour évaluer des sommes de termes finis se déduit d'une formule qu'Euler a obtenue pour le calcul des différences finies, et à laquelle, dans son *Traité des différences et des séries* faisant suite au *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* [1], Lacroix a consacré les nos 913 à 920 : c'est [2]

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx - \tfrac{1}{2}u + B_1 \frac{du}{dx}\frac{h}{2} - B_3 \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2.3.4} + B_5 \frac{d^5u}{dx^5}\frac{h^5}{2.3.4.5} - \ldots,$$

où u et h représentent respectivement une fonction et un accroisse-

(1) Paris, Duprat, an VIII (1800), p. 92 à 107.
(2) *Ibid.*, p. 107.

ment de la variable, et où B_1, B_3, B_5, ... sont les nombres connus sous le nom de *nombres de Bernoulli*. Pour tirer de cette intégrale la valeur de la somme des quantités de o à u, u compris, il faut y ajouter la quantité u, ce qui revient à changer le signe du second terme ([1]). Cette formule sommatoire, étendue à une fonction φ de trois variables x, y, z entre les limites respectives a, b, c, A, B, C, prend la forme suivante, où h', k', l' représentent les accroissements finis des variables x, y, z, tandis que v est la fonction de x, y, z dont il faut sommer les valeurs pour avoir φ :

$$(6)\qquad \begin{aligned}
&\int_a^A\int_b^B\int_c^C h'k'l'\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\\
=\;&\int_a^A\int_b^B\int_c^C v\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{h'}{2}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{k'}{2}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{l'}{2}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial v}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{h'^2}{12}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{k'^2}{12}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{l'^2}{12}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{k'l'}{4}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{l'h'}{4}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\,dx\,dy\,dz\\
&+\frac{h'k'}{4}\int_a^A\int_b^B\int_c^C \frac{\partial^2 v}{dx\,dy}\,dx\,dy\,dz
\end{aligned}$$

([1]) *Voir* le n° 897 dudit Traité, p. 66 à 67, surtout 67.

$$+\frac{h'^2k'}{24}\int_a^A\int_b^B\int_c^B\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\frac{h'k'^2}{24}\int_a^A\int_b^B\int_c^C\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\frac{k'^2l'}{24}\int_a^A\int_b^B\int_c^C\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\,\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\frac{k'l'^2}{24}\int_a^B\int_b^B\int_c^C\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\frac{l'^2h'}{24}\int_a^A\int_b^B\int_c^C\frac{\partial^3 v}{\partial z^2\,\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\frac{l'h'^2}{24}\int_a^A\int_b^B\int_c^C\frac{\partial^3 v}{\partial z\,\partial x^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\frac{h'k'l'}{8}\int_a^A\int_b^B\int_c^C\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ici la quantité à sommer pour avoir X_n est donnée par l'équation

$$(7)\qquad v=\frac{x^2}{r'^{n+1}},$$

où

$$(8)\qquad r'^2=\xi^2h'^2+\eta^2k'^2+\zeta^2l'^2,\quad x=\xi h',\quad y=\eta k',\quad z=\zeta l'.$$

Les limites A, B, C sont toujours immenses (nº 6, Section I), puisqu'elles représentent les quotients de distances finies, divisées par les distances moléculaires $h'\varepsilon$, $k'\varepsilon$, $l'\varepsilon$, et la série (6) sera toujours convergente pour elles; mais il n'en est pas de même des limites a, b, c, qu'on ne pourra pas prendre égales à h', k', l', ni même à de très petits multiples de ces quantités, parce qu'alors la série deviendrait divergente. De plus, l'intégration des termes de cette série conduit, pour beaucoup d'entre eux, à des expressions fort compliquées. Donc, pour tirer un parti utile de la formule (6), il faut : 1º l'appliquer seulement au delà de certains multiples assez grands de h', k', l', et 2º y changer les va-

riables en recourant aux coordonnées sphériques [1], c'est-à-dire en posant

$$(9)\qquad \begin{cases} x = r'\cos\varphi, \quad y = r'\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r'\sin\varphi\sin\psi; \\ dx\,dy\,dz = r'\sin\varphi\,d\varphi\,.\,r'\,d\psi\,dr'; \end{cases}$$

puis, en prenant pour limite des intégrations,

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \quad \text{et} \quad \psi = 2\pi, \\ \varphi &= 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \pi, \\ r' &= \iota \quad \text{et} \quad r' = \mathrm{R}. \end{aligned}$$

Entre $r' = 0$ et $r' = \iota$, on calculera directement les valeurs de v et l'on en fera la somme; l'intégrale (6), déterminée comme il vient d'être dit, en fournira le complément.

3. La marche à suivre est suffisamment expliquée et ne présente pas de difficultés. Ainsi, par exemple,

$$\frac{h'^2}{12}\int_a^{\mathrm{A}}\int_b^{\mathrm{B}}\int_c^{\mathrm{C}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz$$

devient, par la substitution de la valeur de v (7),

$$\frac{h'^2}{12}\int_a^{\mathrm{A}}\int_b^{\mathrm{B}}\int_c^{\mathrm{C}} \left[\frac{2}{r'^{n+1}} - (n+1)\frac{5x^2}{r'^{n+3}} + (n+1)(n+3)\frac{x^4}{r'^{n+5}}\right] dx\,dy\,dz,$$

puis, par le changement de variables,

$$\frac{h'^2}{12}\int_\iota^{\mathrm{A}} \frac{dr'}{r'^{n-1}} \times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [2 - 5(n+1)\cos^2\varphi + (n+1)(n+3)\cos^4\varphi]\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi$$

$$= \frac{h'^2}{12}\left[\frac{1}{(n-2)\iota^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)\mathrm{R}^{n-2}}\right]\left[4\pi - \frac{20\pi}{3}(n+1) + \frac{4\pi}{5}(n+1)(n+3)\right].$$

On calculera de même les autres termes, et l'on trouvera, en désignant

---

[1] *Voir* à ce sujet le *Cours de Calcul infinitésimal*, par J. Houël, t. I, p. 452 à 456; Paris, Gauthier-Villars, 1878.



par CX_n la partie complémentaire de X_n,

$$(10)\left\{\begin{aligned}CX_n = &\frac{\pi}{h'k'l'}\left\{\frac{4}{3(n-4)\iota^{n-4}} + \frac{h'^2}{12(n-2)\iota^{n-2}}\left[4 - \tfrac{20}{3}(n+1) + \tfrac{4}{5}(n+1)(n+3)\right] + \ldots\right.\\ &\left.\qquad - \frac{k'^2 + l'^2}{12(n-2)\iota^{n-2}}\left[\tfrac{4}{3}(n+1) - \tfrac{4}{15}(n+1)(n+3)\right] + \ldots\right\}\\ - &\frac{\pi}{h'k'l'}\left\{\frac{4}{3(n-4)R^{n-4}} + \frac{h'^2}{12(n-2)R^{n-2}}\left[4 - \tfrac{20}{3}(n+1) + \tfrac{4}{5}(n+1)(n+3)\right] + \ldots\right.\\ &\left.\qquad - \frac{k'^2 + l'^2}{12(n-2)R^{n-2}}\left[\tfrac{4}{3}(n+1) - \tfrac{4}{15}(n+1)(n+3)\right] + \ldots\right\}.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on se reporte aux définitions de la force élastique, on voit toujours que, même alors qu'on ne porterait pas à l'infini la limite des molécules intervenant dans les actions moléculairés, celle-ci est toujours finie, et par conséquent R est immensément grand par rapport à h', k', l', ι, ainsi que nous l'avons dit plus haut. On doit se rappeler aussi que les intégrales

$$\frac{1}{(n-4)\iota^{n-4}}, \quad \frac{1}{(n-4)R^{n-4}}$$

doivent être remplacées par $\log\iota$, $\log R$ dans le cas de $n = 4$, et qu'il en est de même dans le cas de $n = 2$ pour les intégrales

$$\frac{1}{(n-2)\iota^{n-2}}, \quad \frac{1}{(n-2)R^{n-2}}.$$

D'autre part, toutes les valeurs de $\frac{\xi^2 h'^2}{r'^{n+2}}$ qu'on a calculées séparément sont finies, décroissantes et en nombre fini; si donc on représente leur somme par A_n, A_n sera une quantité finie. On aura conséquemment

$$(11) \qquad X_n = A_n + CX_n.$$

Cela posé, si ι est assez grand pour que la première parenthèse du second membre de (10) renferme une série convergente, au moins à demi, cette série représente une quantité finie quel que soit l'exposant n; mais il n'en est plus de même de la seconde parenthèse, où R est immense. D'abord, par suite de cette grandeur de R, tous les termes autres que le premier sont négligeables, sans erreur sensible, à côté de celui-

ci, qui est divisé par la moindre puissance de R; la seconde partie du complément se réduit donc à

$$-\frac{\pi}{h'k'l'}\,\frac{4}{3(n-4)R^{n-4}},$$

soit

$$\frac{2\pi R^2}{3h'k'l'},\quad \text{quand } n=2,$$

$$\frac{4\pi R}{3h'k'l'},\quad \text{quand } n=3,$$

$$-\frac{4\pi \log R}{3h'k'l'},\quad \text{quand } n=4,$$

$$-\frac{4\pi}{3h'k'l'R},\quad \text{quand } n=5,$$

....

Partant, le second terme sera supérieur au premier, même augmenté de A_n, quand $n=2$ ou 3; quand $n=4$, il lui sera au moins comparable; car alors $\log R$ croît avec une grande lenteur et est très inférieur à R; au contraire, ce second terme sera négligeable à côté du premier quand $n=5$ ou est >5, puisqu'il devient une quantité du premier ordre ou d'ordres plus grands. Donc l'expression X_n, et par conséquent la composante de la force élastique, ne dépendra que des molécules éloignées pour lesquelles $R\varepsilon$ est une grandeur sensible quand $n=2$ ou 3; elle dépendra au même degré des molécules éloignées et des molécules rapprochées quand $n=4$; enfin, quand $n=5$ ou >5, elle ne dépendra plus que des molécules excessivement rapprochées. Or, comme l'expérience nous montre que les actions moléculaires ne dépendent pas des molécules éloignées et ne constate, aux distances sensibles, aucune action en raison inverse de la troisième ou de la quatrième puissance de la distance, il faut que n soit >4. La formule (10) se réduit alors à

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} CX_n = \frac{\pi}{h'k'l'}\Big\{ & \frac{4}{3(n-4)\iota^{n-4}} + \frac{h'^2}{3(n-2)\iota^{n-2}}\left[1-\tfrac{5}{3}(n+1)+\tfrac{1}{5}(n+2)(n+3)+\ldots\right]\Big\} \\ & -\frac{(n+1)(k'^2+l'^2)}{9(n-2)\iota^{n-2}}\left[1-\tfrac{1}{5}(n+3)\right]+\ldots \\ = B_n; & \end{aligned}\right.$$

nous pouvons actuellement remplacer l'équation (11) par celle-ci :

$$X_n = A_n + B_n, \tag{13}$$

où A_n et B_n représentent des grandeurs finies.

4. En introduisant dans la première (1) cette valeur de X_n, on la ramènera à la forme

$$E_x = \tfrac{1}{2}\rho\,\Sigma \frac{\pm m_n^2 f_n}{m\,\varepsilon^{n-1}}(A_n + B_n). \tag{14}$$

Or E_x, A_n, B_n sont des quantités finies, et le nombre des monômes est également fini, ainsi qu'il résulte du n° 4, Section I; donc aussi $\frac{m_n^2 f_n}{m\,\varepsilon^{n-1}}$ doit être une quantité finie. Mais les masses étant du troisième ordre, le dénominateur est d'ordre ε^{n+2}, et le numérateur doit l'être également; partant f_n est d'ordre $\varepsilon^{n+2-6} = \varepsilon^{n-4}$. Ainsi les vitesses que les actions moléculaires peuvent imprimer aux molécules proportionnellement à leurs capacités, lesquelles sont représentées par f_n, sont tout à fait insensibles, puisque $n = 5$ ou > 5, et les actions moléculaires n'interviennent en rien dans la quantité de mouvement dont une molécule est capable, ce qui du reste est conforme à l'expérience.

On peut calculer les forces élastiques par la marche et les formules indiquées ci-dessus; mais le développement du calcul est assez pénible, et il serait à désirer qu'on pût obtenir des expressions plus convergentes. Les tentatives que j'ai faites montrent que, pour des parallélépipèdes générateurs semblables, les forces élastiques varient beaucoup avec la densité, jusqu'à changer de signe; et que, pour la même densité, elles varient beaucoup avec les proportions des côtés du parallélépipède générateur. Je ne donne pas ici ces calculs dont la longueur me semble hors de proportion avec l'utilité.

Je ferai observer que les composantes se déduisent de la fonction $S\,\frac{1}{r'^{n-1}}$ au moyen de différentiations, soit par rapport aux paramètres h', k', l', soit par rapport aux cosinus des angles des rangées, et que si l'on pouvait obtenir une formule commode pour exprimer $S\,\frac{1}{r'^{n-1}}$, on en déduirait aisément les formules des composantes; mais je suis par-

venu seulement à exprimer $S\frac{1}{r'^{n-1}}$ par une série compliquée et médiocrement convergente pour des rangées orthogonales, divergentes pour des rangées très obliques. Je passe donc ces calculs sous silence.

La méthode employée habituellement pour relier les potentiels inférieurs aux potentiels supérieurs et qui consiste à faire varier les coordonnées du point (x', y', z') censé fixe dans l'expression

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2,$$

en laissant x, y, z constants, c'est-à-dire en supposant que le centre d'attraction puisse varier légèrement sans que les points attirés s'en ressentent, est inapplicable ici; car, contrairement à ce qui se passe pour la gravitation, ce sont les points les plus rapprochés qui seuls sont actifs, et leur action varie au moindre déplacement du centre qui les attire. Les seules quantités qu'il soit permis de faire varier dans les expressions (5) sont, ainsi qu'il vient d'être dit, les paramètres et les angles des rangées, ce qui suppose le déplacement simultané des points x, y, z et non du point (x', y', z').

5. On peut observer, en remontant à la formule (4), Section I, que le facteur de m_n^2, ou simplement m^2 dans les travaux de Cauchy, qui suppose toutes les capacités égales, est en raison inverse de ε^4 ou du quatrième ordre. En examinant attentivement les Mémoires [1] dans lesquels l'illustre géomètre a cru démontrer que les phénomènes lumineux étaient dus à une répulsion en raison inverse de la quatrième puissance, on voit que sa démonstration se réduit à prouver que $\frac{f_n}{r^n}$ y est d'ordre ε^{-4}, c'est-à-dire ce qui précède.

Cauchy a tiré encore trop hâtivement une autre conclusion de ces mêmes calculs. Il y montre, en effet, que la vitesse de la lumière provenant de la gravitation ne peut pas être reconnue expérimentalement, et il en conclut que la masse-poids de l'éther est nulle. Or tout ce qu'il avait le droit de déduire de calculs approximatifs et d'expériences où

---

[1] *Mémoire sur la dispersion de la lumière* ou *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, p. 190 et 191; Prague, chez Calve, 1836. — *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I, p. 304 et 305; Paris, Bachelier, 1840.



les grandeurs de premier ordre sont négligées, c'est que cette masse-poids de l'éther devait être rangée parmi les grandeurs du premier ordre ou les grandeurs plus petites.

Une autre conséquence importante se dégage des conclusions du n° 4 : c'est qu'il n'est jamais permis de négliger les dimensions d'une molécule polyatomique dans le calcul des actions atomiques, et l'admission du contraire a été une grosse erreur des géomètres. Les négliger, en effet, revient à les supposer constamment du second ordre; or, s'il en était ainsi, les distances atomiques seraient du second ordre et les actions en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance deviendraient des quantités finies divisées par ε^{n-1}, c'est-à-dire immenses. En ce cas, tous les termes, attractifs ou répulsifs, s'annuleraient à côté de celui du plus fort exposant n, qui est répulsif (Section I, n° 4), et les atomes seraient violemment écartés de leurs positions par une force irrésistible contre laquelle toutes les actions attractives seraient impuissantes. Les atomes ne peuvent donc pas demeurer d'une manière permanente à des distances mutuelles du second ordre; partant, leurs véritables distances ne peuvent pas être négligées à côté de celles des distances des centres de gravité des molécules, bien que notamment plus petites en général.

Les résultats obtenus dans la Section II pour les forces élastiques ne sont donc vrais que pour les molécules mono-atomiques. On peut toutefois obtenir des expressions des forces élastiques assez semblables à celles de cette Section, et nous allons en entreprendre la recherche.

§ II. — Expressions complètes des forces élastiques.

6. Nous devons conserver la définition de la force élastique superficielle; c'est une action superficielle fictive dont le produit par l'aire correspondante équivaut à la force réelle qu'on remplace par elle. La force réelle est la résultante de toutes les actions exercées par les atomes des molécules situées d'un côté du plan sur les atomes des molécules d'une rangée extérieure à ce plan. La force réelle et la force fictive ont la même direction; quant à la valeur de la force fictive estimée parallèlement à un axe, c'est le quotient d'une division dont le diviseur est l'aire du parallélogramme générateur conjugué à ladite

rangée et dont le dividende est la valeur de la force réelle estimée parallèlement à cet axe, c'est-à-dire de la somme des composantes, parallèlement à cet axe, des actions exercées par les atomes intérieurs sur ceux de la rangée extérieure. Il est visible que la somme de ces composantes élastiques parallèles à un axe, multipliée par l'aire conjuguée, représente la somme des actions exercées par les atomes d'un corps sur les atomes extérieurs parallèlement à l'axe dont il s'agit.

En première approximation, on suppose les centres de gravité des molécules régulièrement distribués, et c'est une conséquence mathématique de l'existence d'une relation continue entre les positions des molécules dans l'état actuel et celles d'un état antérieur où les molécules étaient régulièrement distribuées. Mais on doit se demander ce qu'il faut admettre pour les atomes dans cette même première approximation. Leurs positions varient-elles d'une molécule à l'autre par degrés insensibles, en sorte qu'on puisse les regarder comme identiques dans le rayon d'activité moléculaire en négligeant des quantités du second ordre, ou bien diffèrent-elles de quantités du premier ordre d'une molécule à l'autre, tout en variant d'une manière continue? Nous n'avons pas encore de motifs suffisants pour trancher la question, et, dans l'indécision où nous sommes, nous établirons pour chacune de ces deux hypothèses la formule des composantes élastiques.

Nous conserverons toutes les notations adoptées dans la seconde Section pour représenter les centres de gravité des molécules dans les corps purs, que nous considérerons seulement d'abord; puis nous rattacherons les atomes d'une molécule au centre de gravité de celle-ci par des coordonnées relatives α, β, γ parallèles aux x, y, z. Nous désignerons les atomes d'une molécule s par un nouvel indice σ ajouté au précédent. Ainsi $x_s + \alpha_{s\sigma}$, $y_s + \beta_{s\sigma}$, $z_s + \gamma_{s\sigma}$ seront les coordonnées de l'atome σ de la molécule s, $x_s + \alpha_{s\sigma'}$, $y_s + \beta_{s\sigma'}$, $z_s + \gamma_{s\sigma'}$ celles de l'atome σ' de la même molécule, et ainsi de suite. Nous pourrons encore, pour abréger, désigner simplement par $x_{s\sigma}$, $y_{s\sigma}$, $z_{s\sigma}$ ces coordonnées composées.

Nous avons envisagé les coordonnées x_s, y_s, z_s comme des fonctions du temps t et des coordonnées x_0, y_0, z_0 que le point avait dans son état primitif, où les centres étaient régulièrement distribués; il est tout naturel de rapporter les coordonnées relatives α, β, γ à celles qu'a-

vaient les atomes à la même époque et de supposer α, β, γ des fonctions de t, α_0, β_0, γ_0, ξh, ηk, ζl. Si l'on croit que les coordonnées relatives varient de quantités insensibles d'une molécule à l'autre, on écrira, pour les coordonnées relatives d'un même atome dans les molécules s et s',

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_{s'\sigma} &= \alpha_{\sigma 0}\left(\theta_{\alpha\sigma} + \theta'_{\alpha\sigma}\xi h + \theta''_{\alpha\sigma}\eta k + \theta'''_{\alpha\sigma}\zeta l + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta'_{\alpha\sigma}}{\partial x_0}\xi^2 h^2 + \ldots\right),\\ \beta_{s'\sigma} &= \beta_{\sigma 0}\left(\theta_{\beta\sigma} + \theta'_{\beta\sigma}\xi h + \theta''_{\beta\sigma}\eta k + \theta'''_{\beta\sigma}\zeta l + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta'_{\beta\sigma}}{\partial x_0}\xi^2 h^2 + \ldots\right),\\ \gamma_{s'\sigma} &= \gamma_{\sigma 0}\left(\theta_{\gamma\sigma} + \theta'_{\gamma\sigma}\xi h + \theta''_{\gamma\sigma}\eta k + \theta'''_{\gamma\sigma}\zeta l + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta'_{\gamma\sigma}}{\partial x_0}\xi^2 h^2 + \ldots\right), \end{aligned}\right.$$

où les fonctions θ et leurs dérivées sont des quantités finies et où l'on a

$$\alpha_{\sigma 0}\theta_{\alpha\sigma} = \alpha_{s\sigma},\quad \beta_{\sigma 0}\theta_{\beta\sigma} = \beta_{s\sigma},\quad \gamma_{\sigma 0}\theta_{\gamma\sigma} = \gamma_{s\sigma}.$$

Si, au contraire, on admet un changement appréciable d'une molécule à l'autre, on posera

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_{s'\sigma} &= \alpha_{s\sigma} + \theta'_{\alpha\sigma}\xi h + \theta''_{\alpha\sigma}\eta k + \theta'''_{\alpha\sigma}\zeta l + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta'_{\alpha\sigma}}{\partial x_0}\xi^2 h^2 + \ldots,\\ \beta_{s'\sigma} &= \beta_{s\sigma} + \theta'_{\beta\sigma}\xi h + \theta''_{\beta\sigma}\eta k + \theta'''_{\beta\sigma}\zeta l + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta'_{\beta\sigma}}{\partial x_0}\xi^2 h^2 + \ldots,\\ \gamma_{s'\sigma} &= \gamma_{s\sigma} + \theta'_{\gamma\sigma}\xi h + \theta''_{\gamma\sigma}\eta k + \theta'''_{\gamma\sigma}\zeta l + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta'_{\gamma\sigma}}{\partial x_0}\xi^2 h^2 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Dès lors on aura, en première approximation et avec la première hypothèse,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} x_{s'} + \alpha_{s'\sigma'} - x_s - \alpha_{s\sigma} &= q'_1\xi h + q''_1\eta k + q'''_1\zeta l + \alpha_{s\sigma'} - \alpha_{s\sigma} = \Delta x + \alpha_{s\sigma'} - \alpha_{s\sigma} = \delta x,\\ y_{s'} + \beta_{s'\sigma'} - y_s - \beta_{s\sigma} &= q'_2\xi h + q''_2\eta k + q'''_2\zeta l + \beta_{s\sigma'} - \beta_{s\sigma} = \Delta y + \beta_{s\sigma'} - \beta_{s\sigma} = \delta y,\\ z_{s'} + \gamma_{s'\sigma'} - z_s - \gamma_{s\sigma} &= q'_3\xi h + q''_3\eta k + q'''_3\zeta l + \gamma_{s\sigma'} - \gamma_{s\sigma} = \Delta z + \gamma_{s\sigma'} - \gamma_{s\sigma} = \delta z, \end{aligned}\right.$$

les caractères δx, δy, δz étant pris pour abréger; et en première approximation avec la seconde hypothèse,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} x_{s'} + \alpha_{s'\sigma'} - x_s - \alpha_{s\sigma} &= q'_1\xi h + q''_1\eta k + q'''_1\zeta l + \alpha_{s\sigma'} - \alpha_{s\sigma} + \theta'_{\alpha\sigma'}\xi h + \theta''_{\alpha\sigma'}\eta k + \theta'''_{\alpha\sigma'}\zeta l = \delta x + \lambda_{\alpha\sigma'},\\ y_{s'} + \beta_{s'\sigma'} - y_s - \beta_{s\sigma} &= q'_2\xi h + q''_2\eta k + q'''_2\zeta l + \beta_{s\sigma'} - \beta_{s\sigma} + \theta'_{\beta\sigma'}\xi h + \theta''_{\beta\sigma'}\eta k + \theta'''_{\beta\sigma'}\zeta l = \delta y + \lambda_{\beta\sigma'},\\ z_{s'} + \gamma_{s'\sigma'} - z_s - \gamma_{s\sigma} &= q'_3\xi h + q''_3\eta k + q'''_3\zeta l + \gamma_{s\sigma'} - \gamma_{s\sigma} + \theta'_{\gamma\sigma'}\xi h + \theta''_{\gamma\sigma'}\eta k + \theta'''_{\gamma\sigma'}\zeta l = \delta z + \lambda_{\gamma\sigma'}, \end{aligned}\right.$$

les λ étant encore des abréviations. Il est visible que les formules rela-

tives à la seconde hypothèse se déduisent de celles qu'on a obtenues avec la première en y remplaçant δx, δy, δz par $\delta x + \lambda_{\alpha\sigma'}$, $\delta y + \lambda_{\beta\sigma'}$, $\delta z + \lambda_{\gamma\sigma'}$. Nous allons donc chercher les formules relatives à la première hypothèse.

Afin d'abréger dans ce qui va suivre, nous supprimons l'indice s qui n'a plus d'utilité, puisqu'il désigne un centre unique, pris pour origine des coordonnées par rapport à ξ, η, ζ, et nous désignons par $r_{\sigma\sigma'}$ la distance de deux atomes appartenant à deux molécules différentes, qu'ils soient homologues ou non. Le cas d'atomes homologues est compris dans l'expression générale.

Cela posé, les composantes parallèles aux paramètres actuels h', k', l' (1) de l'action exprimée par la formule (2) de la première Section seront respectivement

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} [(\xi'-\xi)h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma]\mathcal{A}, \\ {[(\eta'-\eta)k + \beta_{\sigma'} - \beta_\sigma]\mathcal{A}}, \\ {[(\zeta'-\zeta)l + \gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma]\mathcal{A}}, \end{array}\right. \qquad \mathcal{A} = \Sigma\frac{\pm\mu_{n\sigma}\beta_{n\sigma'}f_n}{r_{\sigma\sigma'}^{n+1}}.$$

Il y a lieu de faire observer que les α, β, γ n'ont pas ici les mêmes significations que dans (17) et (18); dans les dernières équations, les α, β, γ sont parallèles aux x, y, z rectangulaires; tandis que, dans (19), elles sont obliques en général et parallèles aux paramètres h', k', l'. Cette distinction doit être retenue pour l'intelligence de ce qui va suivre.

Or, si l'on cherche combien il y a, par rapport au plan $\xi = 0$, de

---

(1) Étant données les formules (16), Section I, h, k, l représentant les paramètres de l'assemblage primitif, et q', q'', q''' désignant respectivement, pour abréger, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}$, $\frac{\partial f}{\partial z_0}$, on aura les équations suivantes entre les paramètres primitifs et les paramètres actuels h', k', l'.

$$\begin{array}{lll} q'_1 h = h'\cos(h'x), & q'_2 h = h'\cos(h'y), & q'_3 h = h'\cos(h'z), \\ q''_1 k = k'\cos(k'x), & q''_2 k = k'\cos(k'y), & q''_3 k = k'\cos(k'z), \\ q'''_1 l = l'\cos(l'x), & q'''_2 l = l'\cos(l'y), & q'''_3 l = l'\cos(l'z), \end{array}$$

$$h'^2 = h^2(q'^2_1 + q'^2_2 + q'^2_3),$$
$$k'^2 = k^2(q''^2_1 + q''^2_2 + q''^2_3),$$
$$l'^2 = l^2(q'''^2_1 + q'''^2_2 + q'''^2_3).$$



groupes de deux mêmes atomes σ, σ', pour lesquels, $\eta'-\eta$ et $\zeta'-\zeta$ restant les mêmes, $\xi'-\xi$ a une valeur donnée a, on voit aisément qu'il y en a a; si donc on prend ce plan $\xi=0$ pour celui où l'on veut déterminer la force élastique et l'origine pour son point d'application, on devra poser

$$\xi'-\xi=\xi', \quad \eta'-\eta=\eta', \quad \zeta'-\zeta=\zeta',$$

et l'on verra que les sommes partielles de composantes égales seront

$$\begin{aligned}
&\xi'(\xi' h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\mathcal{M},\\
&\xi'(\eta' k' + \beta_{\sigma'} - \beta_\sigma)\mathcal{M},\\
&\xi'(\zeta' l' + \gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma)\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à sommer toutes les valeurs de cette nature pour toutes les valeurs entières de ξ' de $+1$ à $+\infty$, et de η' et ζ' de $-\infty$ à $+\infty$ pour avoir tous les termes apportés à la résistance totale par l'atome σ et les atomes σ' homologues entre eux dans les diverses molécules intérieures; puis à en faire autant pour tous les autres groupes de deux atomes et à réunir entre elles toutes ces sommes, qui seront [1]

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
&S^4\xi'(\xi' h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\mathcal{M},\\
&S^4\xi'(\eta' k' + \beta_{\sigma'} - \beta_\sigma)\mathcal{M},\\
&S^4\xi'(\zeta' l' + \gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma)\mathcal{M}.
\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons encore ajouter à ces sommes celles qui correspondent aux mêmes valeurs de ξ', η', ζ' avec la disposition des atomes σ, σ' prise en sens contraire; nous aurons des sommes doubles des précédentes, mais où ξ', η', ζ' sont pris entre $\pm\infty$, et nous remplacerons les expressions (20) par la moitié de ces sommes.

Il suffira de diviser ces composantes générales par l'aire du parallélogramme générateur correspondant, ce qui revient à les multiplier par

$$(21)\qquad \frac{\rho h' \cos(x h')}{m},$$

ainsi que nous l'avons vu au n° 3 de la Section II; x désigne la nor-

---

(1) Nous avons donné l'exposant 4 à l'indice S pour indiquer les quatre sommations 1° à ξ', 2° à η', 3° à ζ', 4° aux groupes d'atomes σ, σ'.

male au plan $\xi = 0$. Donc, en employant les notations de la Section II, nous trouverons pour valeurs de la composante élastique :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} E_{h'h'} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos(x h')\, S^{4}\xi' h'(\xi' h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_{\sigma})\frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{h'k'} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos(x h')\, S^{4}\xi' h'(\eta' k' + \beta_{\sigma'} - \beta_{\sigma})\frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{h'l'} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos(x h')\, S^{4}\xi' h'(\zeta' l' + \gamma_{\sigma'} - \gamma_{\sigma})\frac{\mathcal{A}}{m}. \end{aligned}\right.$$

Décomposons la force élastique $E_{h'}$ parallèlement à trois axes rectangulaires, dont l'un, celui des x, est la normale x, et dont deux, ceux des y et des z, sont dans le plan h'; nous aurons, les angles $(k'x)$ et $(l'x)$ étant droits,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} E_{xx} &= E_{h'h'}\cos(h'x),\\ E_{xy} &= E_{h'h'}\cos(h'y) + E_{h'k'}\cos(k'y) + E_{h'l'}\cos(l'y),\\ E_{xz} &= E_{h'h'}\cos(h'z) + E_{h'k'}\cos(k'z) + E_{h'l'}\cos(l'z); \end{aligned}\right.$$

puis, remplaçant les composantes élastiques des seconds membres par leurs expressions (22),

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \tfrac{1}{2}\rho\cos^{2}(h'x)\, S^{4}\xi' h'\ (\xi' h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_{\sigma})\frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{xy} &= \tfrac{1}{2}\rho\ \cos(h'x)\, S^{4}\xi' h'[(\xi' h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_{\sigma})\cos(h'y) + (\eta' k' + \beta_{\sigma'} - \beta_{\sigma})\cos(k'y)\\ &\qquad + (\zeta' l' + \gamma_{\sigma'} - \gamma_{\sigma})\cos(l'y)]\frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{xz} &= \tfrac{1}{2}\rho\ \cos(h'x)\, S^{4}\xi' h'[(\xi' h' + \alpha_{\sigma'} - \alpha_{\sigma})\cos(h'z) + (\eta' k' + \beta_{\sigma'} - \beta_{\sigma})\cos(k'z)\\ &\qquad + (\zeta' l' + \gamma_{\sigma'} - \gamma_{\sigma})\cos(l'z)]\frac{\mathcal{A}}{m}. \end{aligned}$$

Or, si nous remontons aux équations (17) et aux formules de la note relative aux équations (19), nous voyons que

$$\xi' h'\cos(h'x) = q'_{1}\xi' h = \Delta x,$$

dans le cas où, comme ici, $q''_{1} = q'''_{1} = 0$ à cause de $\cos(k'x) = 0$, $\cos(l'x) = 0$); d'ailleurs ξ' et ξ représentent la même chose, c'est-à-dire un nombre entier quelconque;

$$\begin{aligned} \xi' h'\cos(h'y) + \eta' k'\cos(k'y) + \zeta' l'\cos(l'y) &= q'_{2}\xi' h + q''_{2}\eta' k + q'''_{2}\zeta' l = \Delta y,\\ \xi' h'\cos(h'z) + \eta' k'\cos(k'z) + \zeta' l'\cos(l'z) &= q'_{3}\xi' h + q''_{3}\eta' k + q'''_{3}\zeta' l = \Delta z. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\cos(h'x),$$
$$(\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\cos(h'y) + (\beta_{\sigma'} - \beta_\sigma)\cos(k'y) + (\gamma_{\sigma} - \gamma_\sigma)\cos(l'y),$$
$$(\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\cos(h'z) + (\beta_{\sigma'} - \beta_\sigma)\cos(k'z) + (\gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma)\cos(l'z)$$

sont les projections des distances des atomes dans la molécule de l'origine, représentées respectivement par $\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma$, $\beta_{\sigma'} - \beta_\sigma$, $\gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma$ dans les formules (17). Donc, avec les notations des équations (17), les composantes rectangulaires de la force élastique sur le plan x seront exprimées ainsi qu'il suit :

$$(24)\qquad \begin{cases} E_{xx} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta x\, \delta x \dfrac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{xy} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta x\, \delta y \dfrac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{xz} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta x\, \delta z \dfrac{\mathcal{A}}{m}. \end{cases}$$

Les formules ne changeront pas de forme quand on y changera les paramètres h, k, l, ce qui revient à ne supposer nulle aucune des dérivées q''_1, q'''_1 dans (17). Comme on peut toujours trouver un plan réticulaire aussi approché qu'on veut d'un plan quelconque donné, au moins sous le rapport de l'orientation, on peut appliquer les formules (24) à un plan quelconque. On déduira donc, par une simple permutation de lettres, les composantes des forces élastiques sur les plans des y et des z des composantes sur le plan des x. Elles seront, pour le plan y,

$$(25)\qquad \begin{cases} E_{yx} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta y\, \delta x \dfrac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{yy} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta y\, \delta y \dfrac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{yz} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta y\, \delta z \dfrac{\mathcal{A}}{m}; \end{cases}$$

et, pour le plan z,

$$(26)\qquad \begin{cases} E_{zx} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta z\, \delta x \dfrac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{zy} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta z\, \delta y \dfrac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{zz} = \frac{1}{2}\rho S^4 \Delta z\, \delta z \dfrac{\mathcal{A}}{m}; \end{cases}$$

7. Si nous supposons maintenant que les atomes ne sont pas identiquement placés à des quantités du second ordre près dans les molécules concourant à la formation des forces élastiques (seconde hypothèse du n° 6), nous aurons d'autres expressions des forces élastiques, que nous obtiendrons en remplaçant, comme il a été dit ci-dessus, δx, δy, δz par $\delta x + \lambda_{\alpha\sigma'}$, $\delta y + \lambda_{\beta\sigma'}$, $\delta z + \lambda_{\gamma\sigma'}$. Nous obtenons ainsi, pour un corps pur et le plan x,

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} E_{xx} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta x(\delta x + \lambda_{\alpha\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}, \\ E_{xy} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta x(\delta y + \lambda_{\beta\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}, \\ E_{xz} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta x(\delta z + \lambda_{\gamma\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}; \end{aligned} \right.$$

pour le plan y,

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} E_{yx} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta y(\delta x + \lambda_{\alpha\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}, \\ E_{yy} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta y(\delta y + \lambda_{\beta\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}, \\ E_{yz} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta y(\delta z + \lambda_{\gamma\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}; \end{aligned} \right.$$

pour le plan z,

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} E_{zx} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta z(\delta x + \lambda_{\alpha\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}, \\ E_{zy} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta z(\delta y + \lambda_{\beta\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}, \\ E_{zz} &= \tfrac{1}{2}\rho S' \Delta z(\delta z + \lambda_{\gamma\sigma}) \frac{\mathcal{M}}{m}. \end{aligned} \right.$$

On peut observer que, dans les équations (24) à (29), les forces tangentielles de mêmes indices disposés dans un ordre différent ne sont plus égales, ainsi que les géomètres l'obtenaient par des considérations mécaniques; nous reviendrons sur ce sujet dans la cinquième Section.

8. Nous ne chercherons pas les expressions des forces élastiques dans le cas le plus général des mélanges, mais seulement dans le cas particulier d'un mélange de deux corps où les parcelles de chacun d'eux entrent en proportion égale. Ainsi nous considérerons un corps

où, dans l'état primitif, h, k, l sont les paramètres de trois rangées conjuguées qui contiennent, chacune alternativement, une parcelle A et une parcelle B. Mais on ne peut pas admettre que cette égalité subsiste dès que les parcelles entrent en mouvement sous l'intervention des actions moléculaires. Les parcelles se grouperont deux à deux et décriront des orbites autour des centres de gravité des groupes binaires; ces derniers centres seront seuls régulièrement distribués. Le nouvel assemblage aura ses centres sur des rangées parallèles à celles de l'assemblage provenant directement de l'assemblage primitif, savoir une de paramètre double, soit $2h'$, et les deux autres de mêmes paramètres, k', l'. Mais par le fait, dans notre assemblage, $2h'$ jouera le rôle d'un simple paramètre, et nous l'appellerons simplement h'. Nous désignons par s le centre de gravité du groupe, par

$$\mathfrak{x}_s,\quad \mathfrak{y}_s,\quad \mathfrak{z}_s$$

les coordonnées rectangulaires de sa position actuelle, par

$$\mathfrak{x}_s + x_{As},\quad \mathfrak{y}_s + y_{As},\quad \mathfrak{z}_s + z_{As},\quad \mathfrak{x}_s + x_{Bs},\quad \mathfrak{y}_s + y_{Bs},\quad \mathfrak{z}_s + z_{Bs}$$

les coordonnées respectives des centres de gravité de ses parcelles A, B; puis nous rapportons les centres de gravité des molécules dans la parcelle aux centres de gravité de celles-ci au moyen des coordonnées relatives a_{Ass}, b_{Ass}, c_{Ass}, a_{Bss}, ...; enfin nous agissons de même pour les atomes que nous rapportons aux centres de gravité de leurs molécules au moyen des coordonnées relatives $\alpha_{Ass\sigma}$, $\beta_{Ass\sigma}$, $\gamma_{Ass\sigma}$. D'après cela, les coordonnées complètes d'un centre de gravité de molécule A seront

$$\mathfrak{x}_s + x_{As} + a_{Ass},\quad \mathfrak{y}_s + y_{As} + b_{Ass},\quad \mathfrak{z}_s + z_{As} + c_{Ass},$$

et celles d'un atome

$$\mathfrak{x}_s + x_{As} + a_{Ass} + \alpha_{Ass\sigma},\quad \mathfrak{y}_s + y_{As} + b_{Ass} + \beta_{Ass\sigma},\quad \mathfrak{z}_s + z_{As} + c_{Ass} + \gamma_{Ass\sigma}.$$

Le plus souvent, nous les écrirons sous la forme plus abrégée

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_s + x_{Ass},\quad \mathfrak{y}_s + y_{Ass},\quad \mathfrak{z}_s + z_{Ass}, \\ \mathfrak{x}_s + x_{Ass\sigma},\quad \mathfrak{y}_s + y_{Ass\sigma},\quad \mathfrak{z}_s + z_{Ass\sigma}. \end{cases}$$

Nous pourrons regarder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ comme des fonctions des coordonnées primitives, comme nous l'avons fait jusqu'ici pour x, y, z. Posons dès

lors pour abréger, en désignant par x, y, z les coordonnées primitives des centres de gravité des groupes,

$$
(31)\qquad \left\{
\begin{aligned}
d\mathfrak{x} &= q'_1\,dx + q''_1\,dy + q'''_1\,dz + q^{\text{iv}}_1\,dt,\\
d\mathfrak{y} &= q'_2\,dx + q''_2\,dy + q'''_2\,dz + q^{\text{iv}}_2\,dt,\\
d\mathfrak{z} &= q'_3\,dx + q''_3\,dy + q'''_3\,dz + q^{\text{iv}}_3\,dt;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(32)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta x &= q'_1\xi h + q''_1\eta k + q'''_1\zeta l,\\
\Delta y &= q'_2\xi h + q''_3\eta k + q'''_2\zeta l,\\
\Delta z &= q'_3\xi h + q''_3\eta k + q'''_3\zeta l.
\end{aligned}
\right.
$$

Les coordonnées x, y, z, a, b, c, α, β, γ seront aussi chacune des fonctions des valeurs relatives qu'elles avaient dans l'état primitif et des coordonnées x, y, z; nous pourrons, comme nous l'avons fait au n° 6, considérer uniquement leurs sommes $x_{As\sigma}$, $y_{As\sigma}$, ... et la fonction qui en résulte, fonction qui variera pour chaque groupe d'atomes, au moins par ses constantes. Il y a, en outre, à envisager le cas où les positions relatives des atomes homologues varieraient d'une molécule à l'autre d'une manière insensible ou d'une manière sensible. Toutefois, comme la question sera tranchée pour les corps purs dans les n°s 4 et 5 de la Section V, et que le raisonnement serait visiblement le même pour les corps mélangés, nous écarterons l'hypothèse de la variation insensible et admettrons seulement l'autre. Dès lors, nous admettrons qu'on doit poser, avec l'approximation des quantités du premier ordre et au même instant,

$$
(33)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x_{As's'\sigma'} &= x_{Ass'\sigma'} + \theta'_{Ass'\sigma'1}\xi h + \theta''_{Ass'\sigma 1}\eta k + \theta'''_{Ass'\sigma'1}\zeta l,\\
y_{As's'\sigma'} &= y_{Ass'\sigma'} + \theta'_{Ass'\sigma'2}\xi h + \theta''_{Ass'\sigma'2}\eta k + \theta'''_{Ass'\sigma'2}\zeta l,\\
z_{As's'\sigma'} &= z_{Ass'\sigma'} + \theta'_{Ass'\sigma'3}\xi h + \theta''_{Ass'\sigma 3}\eta k + \theta'''_{Ass'\sigma'3}\zeta l,
\end{aligned}
\right.
$$

$x_{Ass'\sigma'}$, $y_{Ass'\sigma'}$, $z_{Ass'\sigma'}$ étant, dans l'état actuel, les coordonnées relatives de l'atome $s'\sigma'$ dans la parcelle s. Il en sera de même pour les parcelles B.

Nous avons à chercher les composantes des actions exercées par les atomes des parcelles intérieures A : 1° sur les parcelles extérieures A; 2° sur les parcelles extérieures B; puis celles des atomes des parcelles intérieures B sur les atomes des parcelles extérieures B et A; ces dernières se déduiront évidemment des premières par une simple permutation des lettres A et B.

I. Calculons d'abord les valeurs approchées des composantes des

actions exercées par les atomes intérieurs $\mathrm{A}ss\sigma$ sur les atomes extérieurs $\mathrm{A}s's'\sigma'$. Les différences des coordonnées rectangulaires qui entrent dans ces composantes sont, en vertu de (32) et (33),

$$(34)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{s'} - \mathfrak{X}_{s} + x_{\mathrm{A}s's'\sigma'} - x_{\mathrm{A}ss\sigma} &= \Delta x + x_{\mathrm{A}ss'\sigma'} - x_{\mathrm{A}ss\sigma} + \theta'_{\mathrm{A}s'\sigma'1}\xi h + \theta''_{\mathrm{A}s'\sigma'1}\eta k + \theta'''_{\mathrm{A}s'\sigma'1}\zeta l = \delta x_1,\\
\mathfrak{Y}_{s'} - \mathfrak{Y}_{s} + y_{\mathrm{A}s's'\sigma'} - y_{\mathrm{A}ss\sigma} &= \Delta y + y_{\mathrm{A}ss'\sigma'} - y_{\mathrm{A}ss\sigma} + \theta'_{\mathrm{A}s'\sigma'2}\xi h + \theta''_{\mathrm{A}s'\sigma'2}\eta k + \theta'''_{\mathrm{A}s'\sigma'2}\zeta l = \delta y_1,\\
\mathfrak{Z}_{s'} - \mathfrak{Z}_{s} + z_{\mathrm{A}s's'\sigma'} - z_{\mathrm{A}ss\sigma} &= \Delta z + z_{\mathrm{A}ss'\sigma'} - z_{\mathrm{A}ss\sigma} + \theta_{\mathrm{A}s'\sigma'3}\xi h + \theta''_{\mathrm{A}s'\sigma'3}\eta k + \theta'''_{\mathrm{A}s'\sigma'3}\zeta l = \delta z_1.
\end{aligned}\right.$$

Les différences des coordonnées parallèles aux rangées actuelles de paramètres h', k', l' auront des expressions bien plus simples ; ce seront

$$(35)\qquad (\xi' - \xi)h' + \theta_{\mathrm{AA}h'},\quad (\eta' - \eta)k' + \theta_{\mathrm{AA}k'},\quad (\zeta' - \zeta)l' + \theta_{\mathrm{AA}l'},$$

$\theta_{\mathrm{AA}h'}$, $\theta_{\mathrm{AA}k'}$, $\theta_{\mathrm{AA}l'}$ représentant les projections, parallèlement à h', k', l', de la distance des atomes $s'\sigma'$, $s\sigma$ dans la parcelle As, augmentée de l'accroissement que la distance de l'atome $\mathrm{A}_{ss'\sigma'}$ au centre s éprouve quand on se transporte au centre s'.

Posons encore, pour abréger,

$$(36)\qquad \mathcal{A} = \Sigma \frac{\pm \mu_{n\,\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\,\mathrm{A}s's'\sigma'}\,f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{A}ss\sigma\,\mathrm{A}s's'\sigma'}};$$

nous trouverons que les composantes de l'action parallèlement aux h', k', l' seront

$$(37)\left\{\begin{aligned}
&[(\xi' - \xi)h' + \theta_{\mathrm{AA}h'}]\mathcal{A},\\
&[(\eta' - \eta)k' + \theta_{\mathrm{AA}k'}]\mathcal{A},\\
&[(\zeta' - \zeta)l' + \theta_{\mathrm{AA}l'}]\mathcal{A}.
\end{aligned}\right.$$

Un même groupe d'atomes $\mathrm{A}ss\sigma$, $\mathrm{A}s's'\sigma'$, pour lequel $\eta' - \eta$ et $\zeta' - \zeta$ sont des quantités constantes, fournira une valeur (37) pour $\xi' - \xi = 1$, deux pour $\xi' - \xi = 2$, trois pour $\xi' - \xi = 3$ et, en général, i pour $\xi' - \xi = i$. Si donc on ajoute entre elles toutes les valeurs égales et si l'on remplace en même temps les entiers $\xi' - \xi$, $\eta' - \eta$, $\zeta' - \zeta$ par d'autres entiers ξ', η', ζ', on trouvera les sommes partielles

$$(38)\left\{\begin{aligned}
&\xi'(\xi' h' + \theta_{\mathrm{AA}h'})\mathcal{A},\\
&\xi'(\eta' k' + \theta_{\mathrm{AA}k'})\mathcal{A},\\
&\xi'(\zeta' l' + \theta_{\mathrm{AA}l'})\mathcal{A}.
\end{aligned}\right.$$

Il faudra sommer ensuite ces expressions par rapport à ξ, η, ζ depuis 1 jusqu'à l'infini pour ξ' et depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ pour η' et ζ' ; ou,

ce qui revient au même, en prenant la moitié des sommes et changeant le signe des coordonnées relatives avec celui de ξ, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ pour ξ, η, ζ [1]. Indiquons cette sommation totale par le simple signe sommatoire S; les composantes totales de toutes les actions exercées par les atomes intérieurs A sur les atomes extérieurs A seront

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\xi' h' + \theta_{\mathrm{AA}h'})\mathcal{A},\\ &\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\eta' k' + \theta_{\mathrm{AA}k'})\mathcal{A},\\ &\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\zeta' l' + \theta_{\mathrm{AA}l'})\mathcal{A}.\end{aligned}\right.$$

En recourant aux considérations suivantes, on peut démontrer assez simplement qu'on a le droit de substituer à la première somme, où ξ est pris depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$, la moitié d'une somme de même forme où ξ est pris entre $\pm\infty$. En effet, le corps où l'on cherche à déterminer la force élastique est supposé en équilibre, et dès lors les composantes de la force élastique calculées d'un côté sont égales et de signes contraires à celles qu'on obtiendrait de l'autre côté en y changeant le signe des coordonnées parallèles à l'axe des x. Mais ce changement de signe donne des expressions de forme identique aux premières; donc il suffit de le rétablir dans ces dernières, c'est-à-dire d'y prendre ξ entre les limites -1 et $-\infty$, pour que les composantes deviennent égales aux premières. Dès lors les composantes où $\xi = 0$ étant nulles, et leur réunion aux sommes des composantes n'en changeant en rien la valeur, on peut substituer aux premières sommes les moitiés d'autres où ξ est pris entre $\pm\infty$.

II. Calculons maintenant les valeurs approximatives des composantes des actions exercées par un atome intérieur $\mathrm{A}s\sigma$ sur un atome extérieur $\mathrm{B}s\sigma$. Nous représenterons d'abord les projections approximatives des distances de ces deux atomes par les formules suivantes, avec

(1) Il y a là une difficulté réelle qu'on peut faire disparaître en représentant par Θ, non plus $u_{\mathrm{A}ss'\sigma'} - u_{\mathrm{A}ss\sigma}$ + l'accroissement de $u_{\mathrm{A}ss'\sigma'}$, mais $u_{\mathrm{A}ss'\sigma'} - u_{\mathrm{A}ss\sigma}$ + l'accroissement de la différence $u_{\mathrm{A}ss'\sigma'} - u_{\mathrm{A}ss\sigma}$. Celui-ci est visiblement égal à celui de la différence $u_{\mathrm{A}ss\sigma} - u_{\mathrm{A}ss'\sigma'}$, mais de signe contraire. D'ailleurs le groupe d'atomes $\mathrm{A}s s\sigma$, $\mathrm{A}s s'\sigma'$ intervient dans la formation des sommes (39), autant que le groupe $\mathrm{A}s s'\sigma'$, $\mathrm{A}s s\sigma$. Donc, quand on change le signe de ξ, η, ζ dans les expressions (38), on tombe sur les valeurs d'un groupe déjà existant, mais où l'ordre des atomes constituants était pris en sens contraire. Il sera donc entendu que nous donnons cette signification au signe Θ.

les coordonnées rectangulaires,

$$(40)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_{s'} - \mathfrak{X}_{s} + x_{\mathrm{B}s's'\sigma'} - x_{\mathrm{A}ss\sigma} = \Delta x + x_{\mathrm{B}ss'\sigma} - x_{\mathrm{A}ss\sigma} + \theta'_{\mathrm{B}s'\sigma'1}\xi h + \theta''_{\mathrm{B}s'\sigma'1}\eta k + \theta'''_{\mathrm{B}s'\sigma'1}\zeta l = \delta x_2, \\ \mathfrak{Y}_{s'} - \mathfrak{Y}_{s} + y_{\mathrm{B}s's'\sigma'} - y_{\mathrm{A}ss\sigma} = \Delta y + y_{\mathrm{B}ss'\sigma'} - y_{\mathrm{B}ss\sigma} + \theta'_{\mathrm{B}s'\sigma'2}\xi h + \theta''_{\mathrm{B}s'\sigma'2}\eta k + \theta'''_{\mathrm{B}s'\sigma 2}\zeta l = \delta y_2, \\ \mathfrak{Z}_{s'} - \mathfrak{Z}_{s} + z_{\mathrm{B}s's'\sigma'} - z_{\mathrm{A}ss\sigma} = \Delta z + z_{\mathrm{B}ss'\sigma'} - z_{\mathrm{B}ss\sigma} + \theta'_{\mathrm{B}s'\sigma'3}\xi h + \theta''_{\mathrm{B}s'\sigma'3}\eta k + \theta'''_{\mathrm{B}s'\sigma'3}\zeta l = \delta z_2, \end{cases}$$

avec les coordonnées obliques parallèles en h', k', l',

$$(41)\qquad (\xi' - \xi)h' + \theta_{\mathrm{AB}h'},\quad (\eta' - \eta)k' + \theta_{\mathrm{AB}k'},\quad (\zeta' - \zeta)l' + \theta_{\mathrm{AB}l'}.$$

Posons d'ailleurs, pour abréger,

$$(42)\qquad \mathfrak{M} = \Sigma \frac{\pm \mu_{n\,\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\,\mathrm{B}ss'\sigma'} f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{A}ss\sigma\,\mathrm{B}s's'\sigma'}},$$

et nous aurons, pour les composantes des actions exercées par les atomes intérieurs A sur les atomes extérieurs B, les valeurs

$$(43)\quad [(\xi' - \xi)h' + \theta_{\mathrm{AB}h'}]\,\mathfrak{M},\quad [(\eta' - \eta)k' + \theta_{\mathrm{AB}k'}]\,\mathfrak{M},\quad [(\zeta' - \zeta)l' + \theta_{\mathrm{AB}l'}]\,\mathfrak{M}.$$

Elles seront susceptibles de la même première sommation que les expressions (37), en sorte qu'on trouvera pour les composantes totales

$$(44)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\xi'h' + \theta_{\mathrm{AB}h'})\,\mathfrak{M}, \\ \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\eta'k' + \theta_{\mathrm{AB}k'})\,\mathfrak{M}, \\ \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\zeta'l' + \theta_{\mathrm{AB}l'})\,\mathfrak{M}. \end{cases}$$

III. Appelons $\theta_{\mathrm{BB}h'}$, $\theta_{\mathrm{BB}k'}$, $\theta_{\mathrm{BB}l'}$ les projections obliques de la distance des deux atomes $s'\sigma'$, $s\sigma$ dans la parcelle Bs et de son accroissement dans la parcelle Bs'; posons en outre

$$(45)\qquad \mathcal{E} = \Sigma \frac{\pm \mu_{n\,\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\,\mathrm{B}ss'\sigma'} f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{B}ss\sigma\,\mathrm{B}s's'\sigma'}};$$

nous aurons, pour les composantes obliques totales des actions exercées par les parcelles intérieures B sur les parcelles extérieures B, lesquelles se déduisent de (39) en y remplaçant l'indice A par B,

$$(46)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\xi'h' + \theta_{\mathrm{BB}h'})\,\mathcal{E}, \\ \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\eta'k' + \theta_{\mathrm{BB}k'})\,\mathcal{E}, \\ \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\xi'(\zeta'l' + \theta_{\mathrm{BB}l'})\,\mathcal{E}. \end{cases}$$

IV. Enfin appelons $\Theta_{BAh'}$, $\Theta_{BAk'}$, $\Theta_{BAl'}$ les projections obliques de la distance des deux atomes $As'\sigma'$, $Bs\sigma$ dans le groupe s et de son accroissement dans le groupe s'; posons en outre

(47) $$\mathcal{D} = \Sigma \frac{\pm \mu_{nBs s\sigma} \mu_{nAs s'\sigma'} f_n}{r^{n+1}_{Bs s\sigma A s' s' \sigma'}},$$

et nous aurons, pour les composantes totales des actions exercées par les atomes intérieurs B sur les atomes extérieurs A,

(48) $$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} S \xi'(\xi' h' + \Theta_{BAh'})\mathcal{D},\\ &\tfrac{1}{2} S \xi'(\eta' k' + \Theta_{BAk'})\mathcal{D},\\ &\tfrac{1}{2} S \xi'(\zeta' l' + \Theta_{BAl'})\mathcal{D}.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons ensemble ces quatre composantes, après les avoir multipliées par

$$\rho \frac{h' \cos(h'x)}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{k'l' \sin(k'l')} \text{ (1)}, \quad \text{où} \quad \mathfrak{M} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B;$$

nous aurons les trois composantes obliques de la force élastique, savoir :

(49) $$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\rho S \xi' h' \cos(h'x)\Big[(\xi' h' + \Theta_{AAh'})\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}} + (\xi' h' + \Theta_{ABh'})\frac{\mathcal{B}}{\mathfrak{M}}\\ &\qquad + (\xi' h' + \Theta_{BBh'})\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{M}} + (\xi' h' + \Theta_{BAh'})\frac{\mathcal{D}}{\mathfrak{M}}\Big],\\ &\tfrac{1}{2}\rho S \xi' h' \cos(h'x)\Big[(\eta' k' + \Theta_{AAk'})\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}} + (\eta' k' + \Theta_{ABk'})\frac{\mathcal{B}}{\mathfrak{M}}\\ &\qquad + (\eta' k' + \Theta_{BBk'})\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{M}} + (\eta' k' + \Theta_{BAk'})\frac{\mathcal{D}}{\mathfrak{M}}\Big],\\ &\tfrac{1}{2}\rho S \xi' h' \cos(h'x)\Big[(\zeta' l' + \Theta_{AAl'})\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}} + (\zeta' l' + \Theta_{ABl'})\frac{\mathcal{B}}{\mathfrak{M}}\\ &\qquad + (\zeta' l' + \Theta_{BBl'})\frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{M}} + (\zeta' l' + \Theta_{BAl'})\frac{\mathcal{D}}{\mathfrak{M}}\Big].\end{aligned}\right.$$

Appelons δu_3 et δu_4 ($u = x, y, z$) ce que deviennent δu_1 (34) et δu_2 (40) quand on y remplace A et B respectivement par B et A; puis cher-

---

(1) $(h'x)$ désigne l'angle de la rangée h' avec la normale x au plan $k'l'$.

chons les composantes élastiques rectangulaires parallèles aux x, y, z en supposant que le plan x ou des y, z est celui qui contient les rangées k' et l'; nous trouverons pour la première des composantes

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\rho S \xi' h' \cos(h'x) \Big\{ & [(\xi' h' + \theta_{AAh'}) \cos(h'x) + (\eta' k' + \theta_{AAk'}) \cos(k'x) + (\zeta' l' + \theta_{AAl'}) \cos(l'x)] \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} \\ & + [(\xi' h' + \theta_{ABh'}) \cos(h'x) + (\eta' k' + \theta_{ABk'}) \cos(k'x) + (\zeta' l' + \theta_{ABl'}) \cos(l'x)] \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}} \\ & + [(\xi' h' + \theta_{BBh'}) \cos(h'x) + (\eta' k' + \theta_{BBk'}) \cos(k'x) + (\zeta' l' + \theta_{BBl'}) \cos(l'x)] \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}} \\ & + [(\xi' h' + \theta_{BAh'}) \cos(h'x) + (\eta' k' + \theta_{BAk'}) \cos(k'x) + (\zeta' l' + \theta_{BAl'}) \cos(l'x)] \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \Big\},\end{aligned}$$

soit, en vertu des équations (34), (40), et de celles qu'on en déduirait par la permutation des indices A et B,

$$(50) \qquad \tfrac{1}{2}\rho S \xi' h' \cos(h'x) \left(\delta x_1 \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} + \delta x_2 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}} + \delta x_3 \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}} + \delta x_4 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \right).$$

Mais, attendu que x est perpendiculaire à k' et à l', on a ici

$$\xi' h' \cos(h'x) = \Delta x.$$

Les deux autres composantes rectangulaires offrent des calculs et des réductions semblables, et l'on obtient pour valeurs définitives des trois composantes rectangulaires

$$(51) \qquad \left\{ \begin{aligned} E_{xx} &= \tfrac{1}{2}\rho S \Delta x \left(\delta x_1 \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} + \delta x_2 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}} + \delta x_3 \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}} + \delta x_4 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \right), \\ E_{xy} &= \tfrac{1}{2}\rho S \Delta x \left(\delta y_1 \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} + \delta y_2 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}} + \delta y_3 \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}} + \delta y_4 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \right), \\ E_{xz} &= \tfrac{1}{2}\rho S \Delta x \left(\delta z_1 \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} + \delta z_2 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}} + \delta z_3 \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}} + \delta z_4 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \right). \end{aligned} \right.$$

On obtiendrait les composantes rectangulaires E_{yx}, E_{yy}, E_{yz} de la force élastique sur le plan y en remplaçant dans les composantes ci-dessus Δx par Δy. De même pour le plan z.

SECTION IV.

ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

§ I. — Mouvement des centres de gravité.

1. J'aborde les considérations mécaniques laissées entièrement de côté jusqu'ici, et je commence par établir les équations de l'équilibre et du mouvement dans le cas le plus général; les valeurs approximatives de ces équations seront recherchées dans la Section V.

Je considère un corps composé de groupes moléculaires (parcelles) qui peuvent, dans des cas particuliers, se réduire à une seule molécule; je ne fais d'ailleurs aucune hypothèse sur leur composition, et je les désigne par des numéros d'ordre s, s′, s″, ... spéciaux à chaque parcelle; je dénote ensuite les molécules d'une parcelle par des numéros d'ordre s, s', s'', ..., et les atomes d'une molécule par les numéros d'ordre σ, σ, σ'', ... D'après ces conventions, analogues à celles de la Section III, § II, une molécule d'un corps formé de parcelles sera caractérisée par deux numéros ss, savoir celui de la parcelle dans le corps et celui de la molécule dans la parcelle; un atome du même corps le sera par les numéros s$s\sigma$ dont les deux premiers font connaître la molécule où il se trouve, et le troisième son numéro dans cette molécule. La désignation d'un atome dans un corps où les molécules ne sont pas groupées sera simplement $s\sigma$.

Je rapporte les centres de gravité des parcelles à des coordonnées rectangulaires, comptées à partir d'une origine fixe; j'en fais autant pour les centres de gravité des molécules dans les corps où elles agis-

sent isolément. Ainsi, dans les milieux à parcelles, les coordonnées des centres de gravité des parcelles seront

$$(1) \qquad x_{\mathbf{s}},\ y_{\mathbf{s}},\ z_{\mathbf{s}}$$

et, dans les milieux ou corps à molécules isolées, les coordonnées des centres de gravité des molécules seront

$$(2) \qquad x_s,\ y_s,\ z_s.$$

Dans la première sorte de milieux, je rapporte les centres de gravité des molécules d'une même parcelle à des axes rectangulaires parallèles aux précédents, mais ayant pour origine le centre de gravité même de la parcelle; et j'en fais autant pour toutes les autres parcelles. J'affecterai à ces coordonnées relatives les lettres

$$(3) \qquad a_{\mathbf{s}s},\ b_{\mathbf{s}s},\ c_{\mathbf{s}s}.$$

Par conséquent, les coordonnées des centres de gravité de molécules, rapportés aux axes directeurs fixes dans un corps à molécules groupées, seront de la forme

$$(4) \qquad x_{\mathbf{s}} + a_{\mathbf{s}s},\ y_{\mathbf{s}} + b_{\mathbf{s}s},\ z_{\mathbf{s}} + c_{\mathbf{s}s},$$

que, pour abréger, j'écrirai habituellement sous la forme plus simple

$$(5) \qquad x_{\mathbf{s}s},\ y_{\mathbf{s}s},\ z_{\mathbf{s}s};$$

mais il faudra se rappeler qu'alors on a, pour deux molécules d'une même parcelle,

$$(6) \qquad x_{\mathbf{s}s'} - x_{\mathbf{s}s} = a_{\mathbf{s}s'} - a_{\mathbf{s}s},\quad \ldots.$$

Je rapporterai de même les atomes aux centres de gravité des molécules dont ils font partie au moyen des coordonnées relatives au centre de la molécule et parallèles aux précédentes

$$(7) \qquad \alpha_{\mathbf{s}s\sigma},\ \beta_{\mathbf{s}s\sigma},\ \gamma_{\mathbf{s}s\sigma}$$

dans les corps à molécules groupées, et

$$(8) \qquad \alpha_{s\sigma},\ \beta_{s\sigma},\ \gamma_{s\sigma}$$

dans les corps à molécules isolées. Dans les premiers, les coordonnées

d'un atome rapporté aux axes directeurs fixes seront

(9) $$x_s + a_{ss} + \alpha_{ss\sigma},\quad y_s + b_{ss} + \beta_{ss\sigma},\quad z_s + c_{ss} + \gamma_{ss\sigma},$$

que, pour abréger et avec les mêmes réserves que pour (5), j'écrirai sous la forme

(10) $$x_{ss\sigma},\quad y_{ss\sigma},\quad z_{ss\sigma},$$

et elles seront, dans les seconds,

(11) $$x_s + \alpha_{s\sigma},\quad y_s + \beta_{s\sigma},\quad z_s + \gamma_{s\sigma},$$

que, pour abréger et avec les mêmes réserves que ci-dessus, je remplacerai par

(12) $$x_{s\sigma},\quad y_{s\sigma},\quad z_{s\sigma}.$$

Ces représentations sont, avec plus de détails, celles que j'ai déjà données dans le § II de la troisième Section.

Je désignerai les distances de deux points par la lettre r ayant en indice les indices des deux points dont il s'agit, atomes ou centres de gravité. Ainsi j'aurai, d'une manière générale, dans les corps à molécules groupées,

(13) $$\left\{\begin{aligned} r^2_{ss'} &= (x_{s'} - x_s)^2 + (y_{s'} - y_s)^2 + (z_{s'} - z_s)^2,\\ r^2_{ss s's} &= (x_{s's'} - x_{ss})^2 + (y_{s's'} - y_{ss})^2 + (z_{s's'} - z_{ss})^2,\\ r^2_{ss\sigma s's'\sigma'} &= (x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})^2 + (y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})^2 + (z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma})^2; \end{aligned}\right.$$

et, dans les corps à molécules isolées,

(14) $$\left\{\begin{aligned} r^2_{ss'} &= (x_{s'} - x_s)^2 + (y_{s'} - y_s)^2 + (z_{s'} - z_s)^2,\\ r^2_{s\sigma s'\sigma'} &= (x_{s'\sigma'} - x_{s\sigma})^2 + (y_{s'\sigma'} - y_{s\sigma})^2 + (z_{s'\sigma'} - z_{\sigma})^2. \end{aligned}\right.$$

Comme il est très facile de déduire les formules relatives aux corps à molécules isolées des formules relatives aux corps à molécules groupées, je considérerai d'abord seulement ceux-ci et laisserai momentanément les autres de côté.

2. Avec les conventions précédentes, qui n'apportent évidemment ni changement, ni restriction dans les hypothèses fondamentales, l'ac-

tion moléculaire définie au n° 5, section I, et exercée entre deux atomes quelconques appartenant à la même molécule ou à des molécules différentes de la même parcelle ou de parcelles différentes, sera

$$(15) \qquad \Sigma \frac{\pm \mu_{n\,ss\sigma} \mu_{n\,s's'\sigma'} f_n}{r^n_{ss\sigma s's'\sigma'}} = \mathcal{A}\, r,$$

et les composantes de cette action, parallèlement aux axes directeurs, seront

$$(16) \qquad (x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})\mathcal{A}, \quad (y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})\mathcal{A}, \quad (z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma})\mathcal{A}.$$

Dès lors, en désignant par $X_{ss\sigma}$, $Y_{ss\sigma}$, $Z_{ss\sigma}$ les composantes des actions étrangères à l'action moléculaire qui sont exercées sur la molécule $ss\sigma$, la pesanteur par exemple, et par $s's'\sigma'$ un atome voisin de $ss\sigma$, j'aurai, en appliquant les formules connues de l'équilibre et du mouvement, les trois relations suivantes :

$$(17) \qquad \begin{cases} \mu_{ss\sigma}\left(X_{ss\sigma} - \dfrac{d^2 x_{ss\sigma}}{dt^2}\right) = S^3 (x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})\mathcal{A}, \\ \mu_{ss\sigma}\left(Y_{ss\sigma} - \dfrac{d^2 y_{ss\sigma}}{dt^2}\right) = S^3 (y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})\mathcal{A}, \\ \mu_{ss\sigma}\left(Z_{ss\sigma} - \dfrac{d^2 z_{ss\sigma}}{dt^2}\right) = S^3 (z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma})\mathcal{A}. \end{cases}$$

Le facteur $\mu_{ss\sigma}$ est la capacité de l'atome pour le mouvement et pour l'attraction en raison inverse du carré de la distance; c'est la quantité à laquelle est affectée spécialement la qualification de masse. Le signe + sous le signe sommatoire Σ dans (15) se rapporte aux termes attractifs qui agissent dans le sens de la pesanteur; quand donc les composantes X, Y, Z se réduisent à celles de la pesanteur, elles sont positives.

Le second membre comprend les composantes rectangulaires des actions qui se développent dans tous les groupes binaires qu'on peut former en combinant successivement avec l'atome $ss\sigma$ l'un quelconque des atomes voisins. Ces combinaisons peuvent s'effectuer de différentes manières et dans des ordres différents. Celui que j'admettrai dans les formules, afin de procéder avec précision dans ce qui va suivre, sera : 1° qu'on groupe d'abord l'atome $ss\sigma$ successivement avec tous les atomes d'une même molécule $s's'$, qu'elle soit dans la même parcelle ou dans une autre, ou qu'elle soit la molécule ss elle-même;

je désigne par S^1 la somme d'une quelconque des trois composantes ainsi trouvée; 2° qu'on a sommé toutes les quantités homologues S^1 que peut fournir la parcelle s', qui peut, comme cas particulier, être la parcelle s et qu'on a trouvé ainsi la somme S^2 de chacune des composantes; 3° qu'enfin les seconds membres (17) sont les sommes des quantités S^2 fournies par les diverses parcelles du corps, y compris la parcelle s elle-même.

3. Ceci posé, je réunis toutes les équations (17) que peuvent fournir les divers atomes de la molécule s*s*, et j'ajoute membre à membre les équations homologues; j'obtiens une nouvelle équation, relative à la molécule et dont il s'agit de déterminer les membres.

Dans le premier membre de la première (17), le premier terme fournira évidemment la somme

$$\mu_{ss\sigma} X_{ss\sigma} + \mu_{ss\sigma'} X_{ss\sigma'} + \mu_{ss\sigma''} X_{ss\sigma''} + \ldots = m_{ss} X_{ss},$$

en appelant X_{ss} une valeur moyenne de $X_{ss\sigma}$, $X_{ss\sigma'}$, $X_{ss\sigma''}$, ... Cela aurait encore évidemment lieu quand on a $X_{ss\sigma} = X_{ss\sigma'} = X_{ss\sigma''} = \ldots$, ce qui a lieu pour le cas de la pesanteur, celle-ci ne variant pas sensiblement dans des espaces assez étendus. De même, le second terme engendrera la somme

$$\begin{aligned} &-\mu_{ss\sigma}\frac{d^2 x_{ss\tau}}{dt^2} - \mu_{ss\sigma'}\frac{d^2 x_{ss\tau}}{dt^2} - \mu_{ss\tau''}\frac{d^2 x_{ss\tau''}}{dt^2} - \ldots \\ &= -(\mu_{ss\sigma} + \mu_{ss\tau'} + \mu_{ss\tau''} + \ldots)\frac{d^2 x_{ss}}{dt^2} - \mu_{ss\sigma}\frac{d^2 \alpha_{ss\tau}}{dt^2} - \mu_{ss\sigma'}\frac{d^2 \alpha_{ss\tau}}{dt^2} - \mu_{ss\sigma''}\frac{d^2 \alpha_{ss\tau''}}{dt^2} + \ldots \\ &= -m_{ss}\frac{d^2 x_{ss}}{dt^2}, \end{aligned}$$

d'après la définition de la molécule et la propriété bien connue des centres de gravité. Les mêmes réductions sont applicables aux premiers membres des seconde et troisième équations (17).

Les seconds membres ne sont point passibles de réductions analogues, parce que les facteurs $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ y sont divisés par des facteurs r^{n+1} variables d'un groupe d'atomes à l'autre; ils devront donc conserver la même forme avec le caractère S^4 de la quatrième sommation, les formules (17) en comportant déjà trois. Toutefois on doit observer que les groupes d'atomes appartenant à la molécule s*s* en auront disparu;

car, si le groupe d'atomes $ss\sigma$, $ss\sigma'$ y donne des termes ayant pour facteurs

$$x_{ss\sigma'} - x_{ss\sigma},\quad y_{ss\sigma'} - y_{ss\sigma},\quad z_{ss\sigma'} - z_{ss\sigma},$$

le groupe d'atomes $ss\sigma'$, $ss\sigma$ qui figurera dans la même somme au même titre que le précédent fournira des termes entièrement semblables, à cela près que les facteurs ci-dessus y seront remplacés par

$$x_{ss\sigma} - x_{ss\sigma'},\quad y_{ss\sigma} - y_{ss\sigma'},\quad z_{ss\sigma} - z_{ss\sigma'};$$

ces termes seront donc de signe contraire, et partant la somme en sera nulle.

Nous arrivons ainsi aux équations suivantes, qui sont celles du mouvement du centre de gravité de la molécule :

$$(18)\quad \begin{cases} m_{ss}\left(X_{ss} - \dfrac{d^2 x_{ss}}{dt^2}\right) = S^4(x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})\mathcal{A}, \\ m_{ss}\left(Y_{ss} - \dfrac{d^2 y_{ss}}{dt^2}\right) = S^4(y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})\mathcal{A}, \\ m_{ss}\left(Z_{ss} - \dfrac{d^2 z_{ss}}{dt^2}\right) = S^4(z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma})\mathcal{A}. \end{cases}$$

Pour les corps à molécules isolées, il y a lieu de supprimer l'indice s de ces formules, aussi bien qu'une unité du chiffre des sommations du second membre; car il y a en moins la sommation des molécules dans la parcelle. Les équations du mouvement des centres de gravité des molécules dans les corps où celles-ci sont isolées seront, par conséquent,

$$(19)\quad \begin{cases} m_s\left(X_s - \dfrac{d^2 x_s}{dt^2}\right) = S^3(x_{s'\sigma'} - x_{s\sigma})\mathcal{A}, \\ m_s\left(Y_s - \dfrac{d^2 y_s}{dt^2}\right) = S^3(y_{s'\sigma'} - y_{s\sigma})\mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \Sigma \dfrac{\pm \mu_{ns\sigma}\mu_{ns'\sigma'} f_n}{r^{n+1}_{s\sigma s'\sigma'}}. \\ m_s\left(Z_s - \dfrac{d^2 z_s}{dt^2}\right) = S^3(z_{s'\sigma} - z_{s\sigma})\mathcal{A}. \end{cases}$$

En multipliant les équations (17) par m_{ss} et en en retranchant les équations (18) homologues, multipliées par $\mu_{ss\sigma}$, on aura les équations du mouvement relatif de l'atome $ss\sigma$; pareille opération peut se faire sur les équations (17) appropriées aux corps à molécules isolées et les

équations (19); nous nous bornons, quant à présent, à signaler ces opérations sans les effectuer.

4. Désignons par $\mathfrak{M}_s$ la masse de la parcelle s et ajoûtons respectivement entre elles toutes les équations (18) que fournissent les diverses molécules de la parcelle s; en raisonnant d'une manière analogue à ce qui a été fait ci-dessus, on verra que les équations du mouvement du centre de gravité de la parcelle seront

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_s\left(X_s - \dfrac{d^2 x_s}{dt^2}\right) = S^s(x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})\mathfrak{A}, \\ \mathfrak{M}_s\left(Y_s - \dfrac{d^2 y_s}{dt^2}\right) = S^s(y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \text{ de la formule (15).} \\ \mathfrak{M}_s\left(Z_s - \dfrac{d^2 z_s}{dt^2}\right) = S^s(z_{s's'\sigma} - z_{ss\sigma})\mathfrak{A}, \end{cases}$$

Dans ces équations, les groupes binaires d'atomes appartenant aux molécules de la parcelle s ne concourent pas à la formation des seconds membres. Ce théorème se démontrerait par des considérations semblables à celles qui ont été exposées dans le n° 3 pour le théorème analogue. On pourra ainsi obtenir les équations du mouvement relatif du centre de gravité d'une molécule s*s* en retranchant les équations (20) multipliées par m_{ss} des équations homologues (18) multipliées par $\mathfrak{M}_s$.

Les équations du mouvement du centre de gravité d'une portion quelconque du milieu envisagé se déduiraient de (20) ou de (19), suivant le cas, de la même manière que les équations (20) ont été déduites des équations (18). Les groupes formés par les atomes intérieurs de la portion ne concourraient pas à la formation des seconds membres.

§ II. — Équations des moments et des forces vives.

5. Telles sont les équations que l'on peut déduire directement par voie d'addition des formules (17); je passe à celles qu'on peut déduire par des moyens différents, ceux qui, dans la Mécanique céleste, conduisent au principe de la conservation des aires et à celui de la conservation des forces vives.

Retranchons respectivement membre à membre la seconde (17) multipliées

tipliée par $x_{ss\sigma}$ de la première (17) multipliée par $y_{ss\sigma}$; la troisième (17) multipliée par $y_{ss\sigma}$ de la seconde (17) multipliée par $z_{ss\sigma}$; la première (17) multipliée par $z_{ss\sigma}$ de la troisième (17) multipliée par $x_{ss\sigma}$; nous trouverons

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mu_{ss\sigma}\left[y_{ss\sigma}X_{ss\sigma} - x_{ss\sigma}Y_{ss\sigma} - \frac{d}{dt}\left(y_{ss\sigma}\frac{dx_{ss\sigma}}{dt} - x_{ss\sigma}\frac{dy_{ss\sigma}}{dt}\right)\right] = S^3(y_{ss\sigma}x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma}y_{s's'\sigma'})\mathcal{L},\\ &\mu_{ss\sigma}\left[z_{ss\sigma}Y_{ss\sigma} - y_{ss\sigma}Z_{ss\sigma} - \frac{d}{dt}\left(z_{ss\sigma}\frac{dy_{ss\sigma}}{dt} - y_{ss\sigma}\frac{dz_{ss\sigma}}{dt}\right)\right] = S^3(z_{ss\sigma}y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma}z_{s's'\sigma'})\mathcal{L},\\ &\mu_{ss\sigma}\left[x_{ss\sigma}Z_{ss\sigma} - z_{ss\sigma}X_{ss\sigma} - \frac{d}{dt}\left(x_{ss\sigma}\frac{dz_{ss\sigma}}{dt} - z_{ss\sigma}\frac{dx_{ss\sigma}}{dt}\right)\right] = S^3(x_{ss\sigma}z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma}x_{s's'\sigma'})\mathcal{L}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons fait passer les facteurs $x_{ss\sigma}$, $y_{ss\sigma}$, $z_{ss\sigma}$ sous le signe sommatoire, ce qui est permis, puisqu'ils sont indépendants du centre variable $s's'\sigma'$ par rapport auquel on opère la sommation.

6. Ajoutons entre elles toutes les équations (21) que fournissent les divers atomes de la molécule ss et voyons ce que nous obtiendrons pour les premiers membres des trois équations résultantes.

Ainsi que nous l'avons observé au début du n° 3, les composantes X, Y, Z ne varient pas d'une manière sensible dans la molécule et peuvent y être considérées comme constantes; on est donc autorisé à écrire

$$\begin{aligned} &S\,\mu_{ss\sigma}(y_{ss\sigma}X_{ss\sigma} - x_{ss\sigma}Y_{ss\sigma})\\ &\quad = (y_{ss}X_{ss} - x_{ss}Y_{ss})\,S\,\mu_{ss\sigma} + X_{ss}\,S\,\mu_{ss\sigma}\beta_{ss\sigma} - Y_{ss}\,S\,\mu_{ss\sigma}\alpha_{ss\sigma}\\ &\quad = m_{ss}(y_{ss}X_{ss} - x_{ss}Y_{ss}), \end{aligned}$$

en vertu du principe du centre de gravité. L'autre terme du premier membre de la première (21) peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -\mu_{ss\sigma}\frac{d}{dt}\Big(&y_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt} - x_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt} + \beta_{ss\sigma}\frac{dx_{ss}}{dt} - \alpha_{ss\sigma}\frac{dy_{ss}}{dt} + y_{ss}\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt} - x_{ss}\frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}\\ &+ \beta_{ss\sigma}\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt} - \alpha_{ss\sigma}\frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}\Big), \end{aligned}$$

et la somme qu'il fournit se réduit, en vertu du principe du centre de gravité, à

$$-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(y_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt} - x_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}\right) - \frac{d}{dt}S\,\mu_{ss\sigma}\left(\beta_{ss\sigma}\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt} - \alpha_{ss\sigma}\frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}\right).$$

Les autres premiers membres offriront des réductions analogues ; quant aux seconds membres, ils comportent une sommation de plus, mais n'entraînent qu'un fait nouveau : c'est que, dans la molécule ss, le groupe binaire d'atomes σ, σ' donnera deux termes égaux et de signe contraire qui se détruiront ; les atomes de la molécule ss n'interviennent donc pas dans la formation des seconds membres. La démonstration est la même qu'au n° 3.

On trouvera en définitive les équations suivantes :

$$(22)\left\{\begin{aligned}
&m_{ss}(y_{ss}X_{ss}-x_{ss}Y_{ss})-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(y_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt}-x_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\,\mu_{ss\sigma}\left(\beta_{ss\sigma}\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt}-\alpha_{ss\sigma}\frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}\right)\\
&\quad=\mathrm{S}^4(y_{ss\sigma}x_{s's'\sigma'}-x_{ss\sigma}y_{s's'\sigma'})\mathcal{A},\\
&m_{ss}(z_{ss}Y_{ss}-y_{ss}Z_{ss})-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(z_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}-y_{ss}\frac{dz_{ss}}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\,\mu_{ss\sigma}\left(\gamma_{ss\sigma}\frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}-\beta_{ss\sigma}\frac{d\gamma_{ss\sigma}}{dt}\right)\\
&\quad=\mathrm{S}^4(z_{ss\sigma}y_{s's'\sigma'}-y_{ss\sigma}z_{s's'\sigma'})\mathcal{A},\\
&m_{ss}(x_{ss}Z_{ss}-z_{ss}X_{ss})-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(x_{ss}\frac{dz_{ss}}{dt}-z_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\,\mu_{ss\sigma}\left(\alpha_{ss\sigma}\frac{d\gamma_{ss\sigma}}{dt}-\gamma_{ss\sigma}\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt}\right)\\
&\quad=\mathrm{S}^4(x_{ss\sigma}z_{s's'\sigma'}-z_{ss\sigma}x_{s's'\sigma'})\mathcal{A}.
\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, si l'on avait retranché la seconde (18) multipliée par x_{ss} de la première (18) multipliée par y_{ss}, la troisième (18) multipliée par y_{ss} de la seconde multipliée par z_{ss}, et la première (18) multipliée par z_{ss} de la troisième (18) multipliée par x_{ss}, on aurait trouvé

$$(23)\left\{\begin{aligned}
&m_{ss}(y_{ss}X_{ss}-x_{ss}Y_{ss})-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(y_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt}-x_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}\right)\\
&\quad=\mathrm{S}^4(y_{ss}x_{s's'\sigma'}-x_{ss}y_{s's'\sigma'}+x_{ss}\beta_{ss\sigma}-y_{ss}\alpha_{ss\sigma})\mathcal{A},\\
&m_{ss}(z_{ss}Y_{ss}-y_{ss}Z_{ss})-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(z_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}-y_{ss}\frac{dz_{ss}}{dt}\right)\\
&\quad=\mathrm{S}^4(z_{ss}y_{s's'\sigma'}-y_{ss}z_{s's'\sigma'}+y_{ss}\gamma_{ss\sigma}-z_{ss}\beta_{ss\sigma})\mathcal{A},\\
&m_{ss}(x_{ss}Z_{ss}-z_{ss}X_{ss})-\frac{d}{dt}m_{ss}\left(x_{ss}\frac{dz_{ss}}{dt}-z_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt}\right)\\
&\quad=\mathrm{S}^4(x_{ss}z_{s's'\sigma'}-z_{ss}x_{s's'\sigma'}+z_{ss}\alpha_{ss\sigma}-x_{ss}\gamma_{ss\sigma})\mathcal{A}.
\end{aligned}\right.$$

En retranchant les équations (22) des équations (23), on aura l'accroissement des aires du mouvement relatif des atomes autour du centre de gravité de la molécule.

7. Ajoutons ensemble toutes les équations (23) que fournissent les diverses molécules d'une même parcelle; en répétant des raisonnements analogues à ceux du numéro précédent, nous verrons que les groupes d'atomes appartenant à la parcelle considérée ne concourent pas à la formation des seconds membres; nous pouvons d'ailleurs, dans des cas très étendus, envisager les composantes X, Y, Z comme constantes; nous arriverons ainsi aux équations suivantes :

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_s(y_s X - x_s Y) - \frac{d}{dt}\mathfrak{M}_s\left(y_s\frac{dx_s}{dt} - x_s\frac{dy_s}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\, m_{ss}\left(b_{ss}\frac{da_{ss}}{dt} - a_{ss}\frac{db_{ss}}{dt}\right) \\
&\qquad = \mathrm{S}^3(y_{ss}x_{s's'\sigma'} - x_{ss}y_{s's'\sigma'} + x_{ss}\beta_{ss\sigma} - y_{ss}\alpha_{ss\sigma})\mathcal{A}, \\
&\mathfrak{M}_s(z_s Y - y_s Z) - \frac{d}{dt}\mathfrak{M}_s\left(z_s\frac{dy_s}{dt} - y_s\frac{dz_s}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\, m_{ss}\left(c_{ss}\frac{db_{ss}}{dt} - b_{ss}\frac{dc_{ss}}{dt}\right) \\
&\qquad = \mathrm{S}^3(z_{ss}y_{s's'\sigma'} - y_{ss}z_{s's'\sigma'} + y_{ss}\gamma_{ss\sigma} - z_{ss}\beta_{ss\sigma})\mathcal{A}, \\
&\mathfrak{M}_s(x_s Z - z_s X) - \frac{d}{dt}\mathfrak{M}_s\left(x_s\frac{dz_s}{dt} - z_s\frac{dx_s}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\, m_{ss}\left(a_{ss}\frac{dc_{ss}}{dt} - c_{ss}\frac{da_{ss}}{dt}\right) \\
&\qquad = \mathrm{S}^3(x_{ss}z_{s's'\sigma'} - z_{ss}x_{s's'\sigma'} + z_{ss}\alpha_{ss\sigma} - x_{ss}\gamma_{ss\sigma})\mathcal{A}.
\end{aligned}
\right.
$$

En retranchant les équations (20) seconde, troisième et première multipliées respectivement par x_s, y_s, z_s des équations (20) première, seconde et troisième multipliées respectivement par y_s, z_s, x_s, on aurait trouvé

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_s(y_s X_s - x_s Y_s) - \frac{d}{dt}\mathfrak{M}_s\left(y_s\frac{dx_s}{dt} - x_s\frac{dy_s}{dt}\right) \\
&\qquad = \mathrm{S}^3[y_s(x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma}) - x_s(y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})]\mathcal{A}, \\
&\mathfrak{M}_s(z_s Y_s - y_s Z_s) - \frac{d}{dt}\mathfrak{M}_s\left(z_s\frac{dy_s}{dt} - y_s\frac{dz_s}{dt}\right) \\
&\qquad = \mathrm{S}^3[z_s(y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma}) - y_s(z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma})]\mathcal{A}, \\
&\mathfrak{M}_s(x_s Z_s - z_s X_s) - \frac{d}{dt}\mathfrak{M}_s\left(x_s\frac{dz_s}{dt} - z_s\frac{dx_s}{dt}\right) \\
&\qquad = \mathrm{S}^3[x_s(z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma}) - z_s(x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})]\mathcal{A}.
\end{aligned}
\right.
$$

La combinaison des équations (24) et (25) permettra de déduire les aires du mouvement relatif des centres de molécule autour du centre de gravité de la parcelle.

On pourrait aller plus loin et chercher les équations relatives à une

portion du milieu. Cela ne présente aucune difficulté. De même on peut déduire de ces équations générales celles qui se rapportent à un corps pur.

8. Reprenons les équations (17) et ajoutons-les membre à membre après les avoir respectivement multipliées par $\frac{dx_{ss\sigma}}{dt}$, $\frac{dy_{ss\sigma}}{dt}$, $\frac{dz_{ss\sigma}}{dt}$, nous trouverons sans difficulté

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu_{ss\sigma}\left(X_{ss\sigma}\frac{dx_{ss\sigma}}{dt}+Y_{ss\sigma}\frac{dy_{ss\sigma}}{dt}+Z_{ss\sigma}\frac{dz_{ss\sigma}}{dt}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mu_{ss\sigma}\left(\frac{dx_{ss\sigma}^2}{dt^2}+\frac{dy_{ss\sigma}^2}{dt^2}+\frac{dz_{ss\sigma}^2}{dt^2}\right)\\ &\quad=S^3\left[(x_{s's'\sigma'}-x_{ss\sigma})\frac{dx_{ss\sigma}}{dt}+(y_{s's'\sigma'}-y_{ss\sigma})\frac{dy_{ss\sigma}}{dt}+(z_{s's'\sigma'}-z_{ss\sigma})\frac{dz_{ss\sigma}}{dt}\right]\mathcal{A}, \end{aligned}\right.$$

équation qui correspond au principe appelé de la *conservation des forces vives*.

En ajoutant entre elles toutes les équations (26) que fournissent les divers atomes de la molécule ss, on s'assure aisément, par des raisonnements semblables à ceux qu'on a déjà développés, qu'on a la relation

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &m_{ss}\left(X_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt}+Y_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}+Z_{ss}\frac{dz_{ss}}{dt}\right)\\ &\qquad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}m_{ss}\left(\frac{dx_{ss}^2}{dt^2}+\frac{dy_{ss}^2}{dt^2}+\frac{dz_{ss}^2}{dt^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S\,\mu_{ss\sigma}\left(\frac{d\alpha_{ss\sigma}^2}{dt^2}+\frac{d\beta_{ss\sigma}^2}{dt^2}+\frac{d\gamma_{ss\sigma}^2}{dt^2}\right)\\ &\quad=\frac{d}{dt}S\,\Sigma\frac{\pm\mu_{ns s\sigma}\mu_{nss\sigma'}f_n}{(n-1)\,r_{ss\sigma ss\sigma'}^{n-1}}\\ &\qquad+S^4\left[(x_{s's'\sigma'}-x_{ss\sigma})\frac{dx_{ss\sigma}}{dt}+(y_{s's'\sigma'}-y_{ss\sigma})\frac{dy_{ss\sigma}}{dt}+(z_{s's'\sigma'}-z_{ss\sigma})\frac{dz_{ss\sigma}}{dt}\right]\mathcal{A}, \end{aligned}\right.$$

où les termes dus aux atomes de la molécule ss figurent dans le premier terme du second membre et non dans l'autre.

En multipliant les équations (18) respectivement par $\frac{dx_{ss}}{dt}$, $\frac{dy_{ss}}{dt}$, $\frac{dz_{ss}}{dt}$, puis les ajoutant, on aurait trouvé

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &m_{ss}\left(X_{ss}\frac{dx_{ss}}{dt}+Y_{ss}\frac{dy_{ss}}{dt}+Z_{ss}\frac{dz_{ss}}{dt}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}m_{ss}\left(\frac{dx_{ss}^2}{dt^2}+\frac{dy_{ss}^2}{dt^2}+\frac{dz_{ss}^2}{dt^2}\right)\\ &\quad=S^4\left[(x_{s's'\sigma'}-x_{ss\sigma})\frac{dx_{ss}}{dt}+(y_{s's'\sigma'}-y_{ss\sigma})\frac{dy_{ss}}{dt}+(z_{s's'\sigma'}-z_{ss\sigma})\frac{dz_{ss}}{dt}\right]\mathcal{A}. \end{aligned}\right.$$

En retranchant cette équation (28) de (27), il viendra

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\,\mu_{ss\sigma}\left(\frac{d\alpha^2_{ss\sigma}}{dt^2}+\frac{d\beta^2_{ss\sigma}}{dt^2}+\frac{d\gamma^2_{ss\sigma}}{dt^2}\right) \\ & = \frac{d}{dt}\,\mathrm{S}\,\Sigma\,\frac{\pm\,\mu_{ns s\sigma}\,\mu_{ns s\sigma'}\,f_n}{(n-1)\,r^{n-1}_{ss\sigma ss\sigma'}} \\ & \quad + \mathrm{S}^4\left[(x_{s's'\sigma'}-x_{ss\sigma})\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt}+(y_{s's'\sigma'}-y_{ss\sigma})\frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}+(z_{s's'\sigma'}-z_{ss\sigma})\frac{d\gamma_{ss\sigma}}{dt}\right]\mathrm{A}. \end{aligned}\right.$$

La même marche conduirait à l'équation relative aux mouvements des molécules dans la parcelle; il est inutile, quant à présent, d'en effectuer les calculs, qui ne présentent pas de difficultés, et nous passons à l'examen des résultats généraux qu'on peut déduire des équations obtenues.

§ III. — Résultats.

9. Supposons l'équation (29) intégrée; à moins d'être constant, auquel cas il donne un résultat nul entre les limites t_0 et t, le premier terme du second membre, savoir

$$\mathrm{S}\,\Sigma\,\frac{\pm\,\mu_{ns s\sigma}\,\mu_{ns s\sigma'}\,f_n}{(n-1)\,r^{n-1}_{ss\sigma ss\sigma'}} - \text{const.},$$

sera une quantité du même ordre que

$$\frac{\varepsilon^3\,\varepsilon^3\,\varepsilon^{n-4}}{\varepsilon^{n-1}} = \varepsilon^3,$$

ε ayant la signification que nous lui avons déjà donnée d'une quantité extrêmement petite du premier ordre. Le second terme du second membre sera du même ordre, puisque sa dérivée était de même ordre que celle du premier terme; le premier membre

$$\text{const.} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\mu_{ss\sigma}\left(\frac{d\alpha^2_{ss\sigma}}{dt^2}+\frac{d\beta^2_{ss\sigma}}{dt^2}+\frac{d\gamma^2_{ss\sigma}}{dt^2}\right)$$

sera donc une quantité du troisième ordre; mais c'est précisément l'ordre du facteur $\mu_{ss\sigma}$ quand on considère des atomes matériels; donc, dans ce cas,

$$\frac{d\alpha^2_{ss\sigma}}{dt^2}+\frac{d\beta^2_{ss\sigma}}{dt^2}+\frac{d\gamma^2_{ss\sigma}}{dt^2}$$

sera une quantité finie. Les vitesses relatives des atomes seront donc des quantités finies; mais leurs vitesses angulaires seront des quantités immensément grandes, inverses des quantités immensément petites du premier ordre. Soient, en effet, r la distance d'un atome au centre de gravité de la molécule, ω', ω'', ω''' les angles que la direction de cette distance fait avec les axes directeurs respectifs des x, y, z; nous aurons

$$\alpha = r\cos\omega', \quad \beta = r\cos\omega'', \quad \gamma = r\cos\omega''',$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2.$$

La différentiation de ces équations par rapport au temps donne

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\omega' - r\sin\omega'\frac{d\omega'}{dt},$$
$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\omega'' - r\sin\omega''\frac{d\omega''}{dt},$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\omega''' - r\sin\omega'''\frac{d\omega'''}{dt},$$
$$\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt} = r\frac{dr}{dt}.$$

Dans la quatrième de ces équations, α, β, γ, r sont des quantités d'ordre ε et $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ sont des quantités finies; donc $\frac{dr}{dt}$ l'est aussi, et il résulte alors des trois premières équations que

$$r\sin\omega'\frac{d\omega'}{dt}, \quad r\sin\omega''\frac{d\omega''}{dt}, \quad r\sin\omega'''\frac{d\omega'''}{dt}$$

sont aussi des quantités finies; donc

$$\frac{d\omega'}{dt}, \quad \frac{d\omega''}{dt}, \quad \frac{d\omega'''}{dt}$$

sont des quantités immensément grandes d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$, puisque r est d'ordre ε. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Quand, au contraire, on considère des atomes éthérés, $\mu_{s s\sigma}$ est d'ordre ε^4; donc, pour que

$$\text{const.} - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\,\mu_{s s\sigma}\left(\frac{d\alpha_{s s\sigma}^2}{dt^2} + \frac{d\beta_{s s\sigma}^2}{dt^2} + \frac{d\gamma_{s s\sigma}^2}{dt^2}\right)$$

soit une quantité finie, il faut avoir

$$\frac{d\alpha^2_{ss\sigma}}{dt^2} + \frac{d\beta^2_{ss\sigma}}{dt^2} + \frac{d\gamma^2_{ss\sigma}}{dt^2}$$

d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ et, par conséquent,

$$\frac{d\alpha_{ss\sigma}}{dt}, \quad \frac{d\beta_{ss\sigma}}{dt}, \quad \frac{d\gamma_{ss\sigma}}{dt}$$

excessivement grands; c'est ce que nous verrons encore ci-après.

10. Lorsque deux corps sont en contact sans réagir l'un sur l'autre, ou même en réagissant l'un sur l'autre, ils ont, près de leur surface de contact, d'autres dispositions d'équilibre et de mouvement qu'à l'intérieur.

Quoique, dans un but de simplification, j'aie supposé, en établissant les équations d'équilibre et de mouvement, que les sommations y étaient étendues à l'infini, il est avéré que les atomes situés à une distance sensible de l'atome $ss\sigma$ n'exercent sur lui aucune influence appréciable et ne donnent aucune valeur sensible dans les sommations des seconds membres. Dès lors deux corps ont beau être en contact par une surface commune, les atomes situés à une distance sensible de cette surface n'éprouvent que les actions des atomes voisins dans les corps auxquels ils appartiennent. Mais il n'en est plus de même pour les atomes situés à une distance insensible de la surface commune; il est visible qu'ils sont soumis aux actions des atomes étrangers dans une proportion d'autant plus forte qu'ils sont plus près de cette surface; ceux mêmes qui en sont immédiatement voisins subissent autant d'actions d'un côté que de l'autre. Cette remarque entraîne une foule de conséquences; je vais passer en revue les principales.

I. Deux corps en contact par une surface plus ou moins grande ont chacun une couche contiguë à cette surface où les lois d'équilibre et de mouvement ne sont pas les mêmes qu'à l'intérieur.

II. Si les molécules situées d'un des côtés de la surface de contact n'éprouvent pas, à des quantités extrêmement petites près, la même action du côté du corps étranger que du côté du leur, elles seront animées de vitesses sensibles qui pourront se traduire par des attractions

ou des répulsions, des endosmoses et des exosmoses ou autres modifications quelconques. L'équilibre sera établi seulement au moment où les molécules contiguës à la surface éprouveront à peu près les mêmes actions du corps étranger que du leur.

III. Les formules des nos 6 et 7 sont applicables, dans leur généralité, aux molécules et parcelles situées dans la couche de contact; il suffira d'y faire intervenir les atomes du corps extérieur dans une proportion d'autant plus grande que la molécule ou parcelle envisagée est plus rapprochée de la surface de contact. Mais il importe d'observer que, par leur nature, ces formules s'appliquent à un groupe d'atomes choisis *a priori* et en déterminent le centre de gravité, soit que le groupe continue à agir comme une entité isolée, c'est-à-dire reste molécule, soit que les atomes composants se répartissent avec ceux des molécules voisines pour former de nouvelles molécules, soit encore que les molécules se groupent entre elles, de manière à former des parcelles distinctes. Les formules ne présenteront pas de différences apparentes dans ces divers cas; seulement, quand on en déduira les valeurs des distances relatives des atomes, on trouvera, dans le cas de persistance d'entité, que ces distances relatives, tantôt positives, tantôt négatives, oscillent autour du centre de gravité, et, dans les autres cas, que les distances relatives placent toujours le même atome d'un même côté de l'ancien centre de gravité, et le font osciller autour de nouveaux centres. Les atomes qui oscilleront autour de nouveaux centres constitueront de nouvelles molécules. Si les premières molécules donnent naissance à des groupes oscillant autour de certains centres communs, sans que chacune d'elles ait varié dans son nombre d'atomes, on dira que le corps s'est groupé en parcelles; s'il y a eu des échanges d'atomes, il y aura eu décomposition et recomposition.

Les parcelles conduisent à des conclusions semblables.

Ceci bien compris, on conclut aisément que, si deux corps n'ayant pas les mêmes intervalles moléculaires arrivent au contact, les molécules superficielles de celui qui a les plus petits intervalles sont très inégalement sollicitées; une partie de ses molécules superficielles a déjà atteint la position de l'équilibre quand l'autre n'y est pas encore; de là des mouvements qui peuvent les faire entrer dans le système des molécules déjà en repos, ou pénétrer dans les intervalles de l'autre

corps dont elles modifieraient à leur tour l'organisation. Le premier effet est un changement du mode de groupement dans les molécules; le second peut correspondre aux phénomènes caractérisés par les mots d'*imbibition*, d'*évaporation*, etc.

IV. Pareils faits peuvent encore se produire entre des corps depuis longtemps en contact lorsque, venant à grandir pour une cause ou pour une autre, les mouvements oscillatoires de l'un déplacent ses molécules ou parcelles terminales par rapport aux molécules ou parcelles terminales de l'autre.

V. Enfin il se peut que les conditions d'équilibre entre les atomes d'une molécule terminale du corps A présentent avec celles d'une molécule du corps B immédiatement voisine des divergences, telles que la première molécule s'unisse à la seconde (combinaison), ou qu'elles échangent en partie leurs atomes (décomposition et recomposition). Ce sont là des faits chimiques; ils paraissent jusqu'à nouvel ordre, malgré l'opinion contraire assez répandue, conciliables avec les attractions et répulsions moléculaires : ils en sont même une conséquence naturelle; mais le sujet est encore très obscur, et l'on manque de données suffisantes pour le traiter par le calcul, seul mode de discussion qui soit accepté dans cet Ouvrage.

11. Je continue à chercher les conséquences générales des formules obtenues, et je vais d'abord examiner et justifier les hypothèses du n° **5**, Section I, sur les molécules de l'éther lumineux.

L'éther peut entrer de deux manières différentes dans un corps : ou en combinaison dans les molécules du corps, ou par molécules ou parcelles isolées intercalées dans les interstices du corps. Le premier mode rend facilement compte de certaines propriétés que les corps acquièrent par l'exposition prolongée à la chaleur, tels que le soufre, le phosphore, l'alun, etc., ce qui ne veut pas dire qu'il en soit l'explication nécessaire. Quant au second mode, il est accepté par tous. Dans l'un et l'autre cas, l'éther ne doit exercer aucune action sensible comme poids, tandis qu'il en produit une plus ou moins énergique aux distances moléculaires. Or, si nous remontons aux équations (17) ci-dessus, nous aurons, en conservant les indices σ, σ' pour les atomes matériels et prenant les indices σ'', σ''' pour les atomes d'éther, puis séparant dans les

seconds membres les termes dus aux actions matérielles des termes dus aux actions éthérées, quels que soient les modes de groupement de l'éther et de la matière,

$$(30)\quad \begin{cases} \mu_{ss\sigma}\left(X - \dfrac{d^2 x_{ss\sigma}}{dt^2}\right) = S^3(x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma})\mathcal{A} + S^3(x_{s''s''\sigma''} - x_{ss\sigma})\mathcal{A}', \\ \mu_{ss\sigma}\left(Y - \dfrac{d^2 y_{ss\sigma}}{dt^2}\right) = S^3(y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma})\mathcal{A} + S^3(y_{s''s''\sigma''} - y_{ss\sigma})\mathcal{A}', \\ \mu_{ss\sigma}\left(Z - \dfrac{d^2 z_{ss\sigma}}{dt^2}\right) = S^3(z_{s's'\sigma'} - z_{ss\sigma})\mathcal{A} + S^3(z_{s''s''\sigma''} - z_{ss\sigma})\mathcal{A}', \end{cases}$$

avec $\mathcal{A}$ de la formule (15) et

$$(31)\quad \mathcal{A}' = \Sigma \frac{\pm \mu_{nss\sigma}\,\mu_{ns''s''\sigma''} f_n}{r^{n+1}_{ss\sigma s''s''\sigma''}},$$

et, pour l'atome éthéré,

$$(32)\quad \begin{cases} \mu_{s''s''\sigma''}\left(X - \dfrac{d^2 x_{s''s''\sigma''}}{dt^2}\right) = S^3(x_{s's'\sigma'} - x_{s''s''\sigma''})\mathcal{A}'' + S^3(x_{s'''s'''\sigma'''} - x_{s''s''\sigma''})\mathcal{A}''', \\ \mu_{s''s''\sigma''}\left(Y - \dfrac{d^2 y_{s''s''\sigma''}}{dt^2}\right) = S^3(y_{s's'\sigma'} - y_{s''s''\sigma''})\mathcal{A}'' + S^3(y_{s'''s'''\sigma'''} - y_{s''s''\sigma''})\mathcal{A}''', \\ \mu_{s''s''\sigma''}\left(Z - \dfrac{d^2 z_{s''s''\sigma''}}{dt^2}\right) = S^3(z_{s's'\sigma'} - z_{s''s''\sigma''})\mathcal{A}'' + S^3(z_{s'''s'''\sigma'''} - z_{s''s''\sigma''})\mathcal{A}''', \end{cases}$$

avec les relations

$$(33)\quad \begin{cases} \mathcal{A}'' = \Sigma \dfrac{\pm \mu_{ns's'\sigma'}\,\mu_{ns''s''\sigma''} f_n}{r^{n+1}_{s's'\sigma's''s''\sigma''}}, \\ \mathcal{A}''' = \Sigma \dfrac{\pm \lambda_{ns''s''\sigma''}\,\mu_{ns'''s'''\sigma'''} f_n}{r^{n+1}_{s''s''\sigma''s'''s'''\sigma'''}}. \end{cases}$$

Il faut que les termes des seconds membres de (30) soient comparables entre eux dès qu'on admet l'intervention sensible de l'éther dans les actions moléculaires; or cela ne peut se faire que de deux manières : ou $\mathcal{A}'$ est comparable à $\mathcal{A}$, par conséquent $\mu_{ns''s''\sigma''}$ à $\mu_{nss\sigma}$, ou il y a dans le voisinage immédiat de l'atome $ss\sigma$ assez d'atomes éthérés pour que les seconds termes des seconds membres soient sensibles. Dans le premier cas, les deux termes des seconds membres de (32) sont des quantités du troisième ordre comme ceux des seconds membres de (30), et, partant, il en est de même des premiers membres de (32), ce qui en-

traine, pour les vitesses accélératrices,

$$\frac{d^2 x_{s''s''\sigma''}}{dt^2}, \ \frac{d^2 y_{s''s''\sigma''}}{dt^2}, \ \frac{d^2 z_{s''s''\sigma''}}{dt^2},$$

l'obligation d'être d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ puisque $\mu_{s''s''\sigma''}$ est d'ordre ε^4. Cette obligation n'a rien de contraire à ce que nous savons de l'éther d'après les phénomènes de la lumière et de l'électricité. Alors $\mu_{s''s''\sigma''}$ est immensément petit par rapport à $\mu_{ns''s''\sigma''}$, et l'éther peut entrer dans le mélange dans des proportions assez faibles, tout en intervenant d'une manière notable sur les actions moléculaires et en échappant complètement aux mesures de poids. Mais dans le second cas, où l'on supposerait $\mu_{s''s''\sigma''}$ et $\mu_{ns''s''\sigma''}$ extrêmement petits par rapport à $\mu_{ns s\sigma}$, il faudrait une extrêmement grande quantité d'atomes éthérés dans le voisinage immédiat de l'atome $ss\sigma$ pour rendre sensibles les seconds termes des seconds membres de (30). Alors, si l'on ajoutait entre elles toutes les équations (32) que fourniraient les atomes éthérés, le premier membre et le premier terme du second membre de la nouvelle équation seraient comparables aux termes des équations (30). Donc à chaque atome matériel correspondrait une masse-poids d'atomes éthérés comparables, et le poids de l'éther luminifère dans tout milieu serait sensible, contrairement à l'expérience. La seconde hypothèse est donc inadmissible. On ne peut pas non plus attribuer à l'éther une masse-poids entièrement nulle, car ce serait lui supposer une vitesse infinie. Ainsi se trouve justifiée l'hypothèse du n° **5**, Section I, sur l'éther.

12. Reprenons les équations (20) applicables à toutes les parcelles ou groupes de molécules d'un corps, même dans ses couches terminales (n° **10**, I), et ajoutons repectivement entre elles toutes les équations semblables que fournissent les diverses parcelles du corps; en désignant par x, y, z les coordonnées de son centre de gravité et par M sa masse, nous trouverons

$$(34)\quad \begin{cases} \mathrm{M}\left(\mathrm{X} - \dfrac{d^2\mathrm{x}}{dt^2}\right) = \mathrm{S}^6 (x_{s's'\sigma'} - x_{ss\sigma}) \mathcal{A}, \\ \mathrm{M}\left(\mathrm{Y} - \dfrac{d^2\mathrm{y}}{dt^2}\right) = \mathrm{S}^6 (y_{s's'\sigma'} - y_{ss\sigma}) \mathcal{A}, \\ \mathrm{M}\left(\mathrm{Z} - \dfrac{d^2\mathrm{z}}{dt^2}\right) = \mathrm{S}^6 (z_{s's'\sigma} - z_{ss\sigma}) \mathcal{A}. \end{cases}$$

Les atomes intérieurs, excepté ceux des couches terminales, ne concourent pas à la formation des seconds membres pour des raisons semblables à celles qui ont été développées au n° 3. Ces seconds membres représentent donc les actions mutuelles des atomes de deux couches séparées par la surface terminale du corps et n'ayant chacune qu'une épaisseur extrêmement petite, égale à ce qu'on appelle le *rayon d'activité moléculaire*. Or ces actions peuvent être représentées par des forces élastiques superficielles, ainsi qu'on l'a fait dans les Sections II et III; on est donc fondé à poser les théorèmes suivants :

I. *La quantité de force accélératrice perdue par un corps est égale à la résultante des forces élastiques développées sur sa surface par l'action de ses atomes sur ceux des corps environnants.*

II. *Les efforts d'un corps sur un autre se transmettent d'une couche à l'autre et l'épaisseur de ces couches ne dépasse pas ce qu'on appelle le* RAYON D'ACTIVITÉ MOLÉCULAIRE.

Ces théorèmes sont complètement d'accord avec les données de l'expérience. Ainsi une couche de corps gras, d'épaisseur insensible, modifie complètement le frottement d'un corps glissant sur un autre, c'est-à-dire la transmission de l'action du corps en mouvement au corps en repos.

SECTION V.

APPROXIMATION DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE ET DE MOUVEMENT.

1. Les formules de la Section IV ont été obtenues avec toute la généralité désirable; mais elles ne sont pas appropriées aux calculs pratiques. Nous allons en déduire des approximations qui permettront une comparaison plus facile de la théorie avec les faits.

Afin de simplifier d'abord autant que possible la marche des calculs, nous commencerons par considérer un corps pur, à molécules isolées et mono-atomiques, simple, par conséquent, dans le sens attaché à ce mot par les chimistes. Partant, les équations du mouvement de la molécule seront celles du mouvement de l'atome, c'est-à-dire les équations (17) de la Section précédente, où l'on aura remplacé la lettre μ par la lettre m et supprimé les indices s et σ. Elles seront ainsi

$$(1)\qquad \begin{cases} m\left(X - \dfrac{d^2x_s}{dt^2}\right) = S(x_{s'} - x_s)\mathcal{A}, \\ m\left(Y - \dfrac{d^2y_s}{dt^2}\right) = S(y_{s'} - y_s)\mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \Sigma\dfrac{\pm m_n^2 f_n}{r_{ss'}^{n+1}}. \\ m\left(Z - \dfrac{d^2z_s}{dt^2}\right) = S(z_{s'} - z_s)\mathcal{A}, \end{cases}$$

Posons, pour abréger, les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} x_{s'} - x_s = Dx + D^2x + D^3x + \ldots, \\ y_{s'} - y_s = Dy + D^2y + D^3y + \ldots. \\ z_{s'} - z_s = Dz + D^2z + D^3z + \ldots, \end{cases}$$

où l'exposant de D indique l'ordre de la quantité immensément petite

à laquelle le terme se rapporte, et négligeons, dans ces équations, toutes les quantités du troisième ordre et des ordres supérieurs; posons en outre

$$(3)\qquad \begin{cases} r^2 = \overline{\mathrm{D}x}^2 + \overline{\mathrm{D}y}^2 + \overline{\mathrm{D}z}^2, \\ \iota^2 = \overline{\mathrm{D}^2 x}^2 + \overline{\mathrm{D}^2 y}^2 + \overline{\mathrm{D}^2 z}^2; \end{cases}$$

nous aurons, en négligeant les termes du quatrième ordre et les suivants :

$$(4)\qquad \begin{cases} r_{ss'}^2 = \overline{\mathrm{D}x}^2 + \overline{\mathrm{D}y}^2 + \overline{\mathrm{D}z}^2 + 2\,\mathrm{D}x\,\mathrm{D}^2 x + 2\,\mathrm{D}y\,\mathrm{D}^2 y + 2\,\mathrm{D}z\,\mathrm{D}^2 z \\ \qquad = r^2 + 2\,r\iota\cos(r\iota) \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \frac{1}{r_{ss'}^{n+1}} = \frac{1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)}{r^{n+3}}\, r\iota\cos(r\iota).$$

On pourra mettre les équations (1) sous la forme suivante, où l'on a supprimé dans les premiers membres l'indice s désormais inutile :

$$(6)\qquad \begin{cases} m\left(\mathrm{X} - \dfrac{d^2 x}{dt^2}\right) = \mathrm{S}\Sigma \pm m_n^2 f_n \left[\dfrac{\mathrm{D}x}{r^{n+1}} + \dfrac{\mathrm{D}^2 x}{r^{n+1}} - (n+1)\dfrac{\mathrm{D}x}{r^{n+3}}\, r\iota\cos(r\iota)\right], \\ m\left(\mathrm{Y} - \dfrac{d^2 y}{dt^2}\right) = \mathrm{S}\Sigma \pm m_n^2 f_n \left[\dfrac{\mathrm{D}y}{r^{n+1}} + \dfrac{\mathrm{D}^2 y}{r^{n+1}} - (n+1)\dfrac{\mathrm{D}y}{r^{n+3}}\, r\iota\cos(r\iota)\right], \\ m\left(\mathrm{Z} - \dfrac{d^2 z}{dt^2}\right) = \mathrm{S}\Sigma \pm m_n^2 f_n \left[\dfrac{\mathrm{D}z}{r^{n+1}} + \dfrac{\mathrm{D}^2 z}{r^{n+1}} - (n+1)\dfrac{\mathrm{D}z}{r^{n+3}}\, r\iota\cos(r\iota)\right]. \end{cases}$$

Or de ce qu'on suppose, en première approximation, les molécules régulièrement distribuées, il résulte tout d'abord qu'on a

$$\mathrm{S}\Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\mathrm{D}x}{r^{n+1}} = 0,\quad \mathrm{S}\Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\mathrm{D}y}{r^{n+1}} = 0,\quad \mathrm{S}\Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\mathrm{D}z}{r^{n+1}} = 0.$$

Il reste à évaluer les quantités

$$\frac{\mathrm{D}^2 x}{r^{n+1}} - (n+1)\frac{\mathrm{D}x}{r^{n+3}}\, r\iota\cos(r\iota),\ \ldots.$$

Nous reprenons les conventions du n° 14 de la Section I pour la représentation des coordonnées des molécules ici réduites à des points; nous supposerons que x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un état primi-

tif antérieur d'où l'état actuel dérive sans solution de continuité et où les molécules étaient régulièrement distribuées; en représentant par h, k, l les paramètres de l'état primitif antérieur, nous aurons, au lieu des accroissements considérés dans le numéro précité,

$$\Delta x_0 = \xi h, \quad \Delta y_0 = \eta k, \quad \Delta z_0 = \zeta l, \tag{7}$$

ξ, η, ζ étant des nombres entiers pour toutes les molécules. Nous en déduisons

$$\left\{\begin{aligned} Dx &= \Delta x = q'_1 \xi h + q''_1 \eta k + q'''_1 \zeta l, \\ Dy &= \Delta y = q'_2 \xi h + q''_2 \eta k + q'''_2 \zeta l, \\ Dz &= \Delta z = q'_3 \xi h + q''_3 \eta k + q'''_3 \zeta l \end{aligned}\right. \tag{8}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} 2D^2 x &= \frac{\partial \Delta x}{\partial x_0} \xi h + \frac{\partial \Delta x}{\partial y_0} \eta k + \frac{\partial \Delta x}{\partial z_0} \zeta l, \\ 2D^2 y &= \frac{\partial \Delta y}{\partial x_0} \xi h + \frac{\partial \Delta y}{\partial y_0} \eta k + \frac{\partial \Delta y}{\partial z_0} \zeta l, \\ 2D^2 z &= \frac{\partial \Delta z}{\partial x_0} \xi h + \frac{\partial \Delta z}{\partial y_0} \eta k + \frac{\partial \Delta z}{\partial z_0} \zeta l. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nous verrons aisément, en nous reportant à l'équation (4), que

$$\frac{D^2 x}{r^{n+1}} - (n+1) \frac{Dx}{r^{n+3}} r\iota \cos(r\iota) = \tfrac{1}{2} \xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \tfrac{1}{2} \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \tfrac{1}{2} \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\Delta x}{r^{n+1}}.$$

Les deux autres équations (6) subiront des réductions analogues, en sorte qu'on peut poser à leur place les nouvelles formules

$$\left\{\begin{aligned} m\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) &= \tfrac{1}{2} S\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta x}{r^{n+1}}\right), \\ m\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) &= \tfrac{1}{2} S\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta y}{r^{n+1}}\right), \\ m\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) &= \tfrac{1}{2} S\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0} \Sigma \pm m_n^2 f_n \frac{\Delta z}{r^{n+1}}\right). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Rappelons ici une des formules élémentaires du Calcul différentiel. Soit φ une fonction explicite de x, y, z, variables qui seraient elles-mêmes des fonctions explicites de x_0, y_0, z_0; ce qui rend φ une fonction implicite de x_0, y_0, z_0. En égalant entre elles les dérivées prises à ces deux points de vue et employant pour les dérivées de x, y, z par

rapport à x_0, y_0, z_0 les notations des formules (8), nous trouvons

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}q'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}q'_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q'_3,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}q''_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}q''_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q''_3,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}q'''_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}q'''_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q'''_3. \end{aligned}\right.$$

Faisons, dans ces formules, $\varphi = \frac{\Delta x}{r^{n+1}}$; nous en déduirons, en recourant aux formules (8),

$$\begin{aligned} &\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\Delta x}{r^{n+1}}\\ &\quad = (q'_1\xi h + q''_1\eta k + q'''_1\zeta l)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + (q'_2\xi h + q''_2\eta k + q'''_2\zeta l)\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta x}{r^{n+1}}\\ &\qquad + (q'_3\xi h + q''_3\eta k + q'''_3\zeta l)\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta x}{r^{n+1}}\\ &\quad = \Delta x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta x}{r^{n+1}}. \end{aligned}$$

On aura de même

$$\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} = \Delta x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta y}{r^{n+1}},$$

$$\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} = \Delta x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta z}{r^{n+1}}.$$

Ceci nous permet de remplacer par les équations suivantes les équations (10) multipliées préalablement par $\frac{\rho}{m}$, afin d'en rendre les seconds membres comparables aux équations (47) de la Section II :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{\rho}{2}S\Sigma\frac{\pm m_n^2 f_n}{m}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta x}{r^{n+1}} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta x}{r^{n+1}}\right),\\ \rho\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{\rho}{2}S\Sigma\frac{\pm m_n^2 f_n}{m}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta y}{r^{n+1}} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta y}{r^{n+1}}\right),\\ \rho\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{\rho}{2}S\Sigma\frac{\pm m_n^2 f_n}{m}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta z}{r^{n+1}} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta z}{r^{n+1}}\right). \end{aligned}\right.$$

Appliquons aux seconds membres de ces équations la différentiation

par parties représentée par la formule

$$u\,dv = d\,uv - v\,du,$$

et remplaçons la première partie par les valeurs (47) de la Section II; nous trouverons

$$(13)\qquad \begin{cases} \rho\left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{xz}}{\partial z}, \\ \rho\left(Y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{yz}}{\partial z}, \\ \rho\left(Z - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zz}}{\partial z}. \end{cases}$$

En effet, les seconds termes des seconds membres, savoir

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\Sigma \frac{\pm m_n^2 f_n}{m}\,\frac{\Delta x}{r^{n+1}}\left(\frac{\partial\rho\,\Delta x}{\partial x} + \frac{\partial\rho\,\Delta y}{\partial y} + \frac{\partial\rho\,\Delta z}{\partial z}\right),$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\Sigma \frac{\pm m_n^2 f_n}{m}\,\frac{\Delta y}{r^{n+1}}\left(\frac{\partial\rho\,\Delta x}{\partial x} + \frac{\partial\rho\,\Delta y}{\partial y} + \frac{\partial\rho\,\Delta z}{\partial z}\right),$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\Sigma \frac{\pm m_n^2 f_n}{m}\,\frac{\Delta z}{r^{n+1}}\left(\frac{\partial\rho\,\Delta x}{\partial x} + \frac{\partial\rho\,\Delta y}{\partial y} + \frac{\partial\rho\,\Delta z}{\partial z}\right)$$

sont tous nuls à cause de l'identité

$$(14)\qquad \frac{\partial\rho\,\Delta x}{\partial x} + \frac{\partial\rho\,\Delta y}{\partial y} + \frac{\partial\rho\,\Delta z}{\partial z} = 0,$$

que nous allons démontrer de la manière suivante.

Posons

$$(15)\qquad D = \begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho},$$

en vertu de l'équation (19) de la première Section, et résolvons les équations (11) par rapport à $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$; nous trouverons

$$(16)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0} \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0} \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0} \end{vmatrix};$$

puis appliquons ces formules à l'expression (14). Nous trouverons, en recourant aux règles connues des déterminants et remplaçant $\frac{\partial q'_1}{\partial y_0}$ par $\frac{\partial q''_1}{\partial x_0}$, ...,

$$\frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{\partial\rho\,\Delta x}{\partial x}+\frac{\partial\rho\,\Delta y}{\partial y}+\frac{\partial\rho\,\Delta z}{\partial z}\right)$$

$$= \rho\xi h \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial x_0} & \frac{\partial q''_1}{\partial x_0} & \frac{\partial q'''_1}{\partial x_0} \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ \frac{\partial q'_2}{\partial x_0} & \frac{\partial q''_2}{\partial x_0} & \frac{\partial q'''_2}{\partial x_0} \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ \frac{\partial q'_3}{\partial x_0} & \frac{\partial q''_3}{\partial x_0} & \frac{\partial q'''_3}{\partial x_0} \end{vmatrix}$$

$$+ \rho\eta k \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial y_0} & \frac{\partial q''_1}{\partial y_0} & \frac{\partial q'''_1}{\partial y_0} \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ \frac{\partial q'_2}{\partial y_0} & \frac{\partial q''_2}{\partial y_0} & \frac{\partial q'''_2}{\partial y_0} \\ q'_3 & q''_3 & q'''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q'_1 & q''_1 & q'''_1 \\ q'_2 & q''_2 & q'''_2 \\ \frac{\partial q'_3}{\partial y_0} & \frac{\partial q''_3}{\partial y_0} & \frac{\partial q'''_3}{\partial y_0} \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \rho\xi h\frac{\partial D}{\partial x_0} + \rho\eta k\frac{\partial D}{\partial y_0} + \rho\zeta l\frac{\partial D}{\partial z_0} + D\left(\xi h\frac{\partial\rho}{\partial x_0} + \eta k\frac{\partial\rho}{\partial y_0} + \zeta l\frac{\partial\rho}{\partial z_0}\right)$$

$$= \xi h\frac{\partial D\rho}{\partial x_0} + \eta k\frac{\partial D\rho}{\partial y_0} + \zeta l\frac{\partial D\rho}{\partial z_0} = 0,$$

d'après l'équation (15), laquelle donne

$$D\rho = \rho_0, \quad \text{c'est-à-dire constante.}$$

L'équation (14) est donc démontrée.

2. Tous les géomètres qui, depuis Navier, ont cherché les équations de l'équilibre et du mouvement des corps dans la considération de forces élastiques continues appliquées aux faces d'un parallélépipède rectangulaire sont arrivés aux équations (13); et, je dois le dire, en supposant *a priori* l'identité de ces forces avec les actions moléculaires, ils ont agi d'une manière beaucoup plus brève et beaucoup plus élégante que je ne l'ai fait moi-même; on peut le voir dans les *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* de Lamé [1], Ou-

[1] Paris, Mallet-Bachelier, p. 14 et suiv.; 1852.

vrage que j'ai déjà cité plusieurs fois; cependant j'ai préféré la marche précédente, guidé en cela par les raisons suivantes.

I. J'ai suivi une marche conforme à la règle que je me suis imposée, de n'ajouter, dans mes déductions, aucune hypothèse subsidiaire aux hypothèses fondamentales, et c'en est une d'admettre *a priori* l'identité des seconds membres (6) avec la variation des forces élastiques.

II. Elle lève, pour le cas de molécules monoatomiques isolées, les doutes que Lamé conçoit sur la théorie de l'élasticité dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes* ([1]), et tous les résultats obtenus par l'illustre géomètre dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* doivent être considérés comme acquis à l'hypothèse des attractions avec les molécules monoatomiques.

III. Elle permet de reconnaître une variabilité périodique et non soupçonnée des forces élastiques dont l'expérience nous donne seulement les moyennes.

IV. Elle fournit les moyens de pousser à volonté l'approximation dans certains cas spéciaux où celle du second ordre est insuffisante.

V. Elle permet aussi de se rendre compte des actions moléculaires, ainsi qu'on le verra dans les numéros suivants, ce que ne fait pas l'hypothèse admise un peu à la légère par Navier et ses successeurs. Cette hypothèse, en effet, supprime l'occasion de discuter les faits et de s'en rendre compte; aussi doit-elle, avec celle des dimensions négligeables de la molécule, être considérée comme une des principales causes des insuccès éprouvés jusqu'à présent, de l'aveu de tous, par les géomètres attractionnaires dans l'étude des phénomènes moléculaires.

3. Passons à un cas un peu plus difficile : celui d'un corps pur à molécules isolées, mais polyatomiques. Les formules applicables à ce cas sont les équations (19) de la Section IV. Nous y poserons d'une manière générale, comme au n° **1**,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} x_{s'} - x_s + \alpha_{s'\sigma'} - \alpha_{s\sigma} &= \mathrm{D}x + \mathrm{D}^2x + \mathrm{D}^3x + \ldots,\\ y_{s'} - y_s + \beta_{s'\sigma'} - \beta_{s\sigma} &= \mathrm{D}y + \mathrm{D}^2y + \mathrm{D}^3y + \ldots,\\ z_{s'} - z_s + \gamma_{s'\sigma'} - \gamma_{s\sigma} &= \mathrm{D}z + \mathrm{D}^2z + \mathrm{D}^3z + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Les termes des seconds membres indiquent les grandeurs successives

---

Paris, Mallet-Bachelier, p. 360 et suiv.; 1859.

du premier ordre, du second ordre, etc. Ils diffèrent de ceux de l'équation (2) en ce sens, qu'ils contiennent des quantités afférentes aux coordonnées relatives α, β, γ, tandis que les seconds membres de (2) n'en contiennent pas. Comme au n° 1, nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, aux termes des deux premiers ordres. Les calculs seront dès lors les mêmes au début qu'au n° 1, et nous arriverons de même aux équations (3), (4), (5) et (6). Substituons alors ces valeurs dans les équations (19) de la Section IV et supprimons-y les termes d'ordre plus petit que $\frac{f_n}{r^{n-1}}$; observons encore, comme au n° 1, que les termes

$$\mathrm{S}\,\mathrm{D}x\,\Sigma\,\frac{\pm\,\mu_{n\sigma}\,\mu_{n\sigma'}\,f_n}{r^{n+1}},\quad \ldots$$

sont nuls en tant que composés de quantités égales deux à deux et de signes contraires; nous trouverons pour valeurs approchées des équations dont il s'agit

$$(18)\quad \begin{cases} m\left(\mathrm{X}-\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=\mathrm{S}\,\Sigma\pm\mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'}f_n\left[\dfrac{\mathrm{D}^2x}{r^{n+1}}-(n+1)\dfrac{\mathrm{D}x}{r^{n+3}}\,r\iota\cos(r\iota)\right],\\ m\left(\mathrm{Y}-\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\mathrm{S}\,\Sigma\pm\mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'}f_n\left[\dfrac{\mathrm{D}^2y}{r^{n+1}}-(n+1)\dfrac{\mathrm{D}y}{r^{n+3}}\,r\iota\cos(r\iota)\right],\\ m\left(\mathrm{Z}-\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)=\mathrm{S}\,\Sigma\pm\mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'}f_n\left[\dfrac{\mathrm{D}^2z}{r^{n+1}}-(n+1)\dfrac{\mathrm{D}z}{r^{n+3}}\,r\iota\cos(r\iota)\right]. \end{cases}$$

Il s'agit actuellement d'évaluer les quantités des seconds membres. Elles dépendent des coordonnées relatives des atomes, sur la marche desquelles on peut faire deux suppositions différentes, ainsi que nous l'avons vu au début du n° 6 de la Section III; nous suivrons ici une marche analogue et nous déterminerons les seconds membres en supposant : 1° que les positions des atomes varient par degrés insensibles d'une molécule à l'autre; 2° que ces positions varient par degrés sensibles.

4. I. *Les positions des atomes varient par degrés insensibles.* — Nous avons alors, en recourant aux notations du n° 6, Section III,

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{D}x=\delta x=\Delta x+\alpha_{\sigma'}-\alpha_{\sigma},\\ \mathrm{D}y=\delta y=\Delta y+\beta_{\sigma'}-\beta_{\sigma},\\ \mathrm{D}z=\delta z=\Delta z+\gamma_{\sigma'}-\gamma_{\sigma}; \end{cases}$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} D^2 x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta x}{\partial x_0}\xi h + \frac{\partial\Delta x}{\partial y_0}\eta k + \frac{\partial\Delta x}{\partial z_0}\zeta l\right) + \alpha_{\tau'}(\theta'_{\alpha\sigma'}\xi h + \theta''_{\alpha\sigma'}\eta k + \theta'''_{\alpha\sigma'}\zeta l),\\ D^2 y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta y}{\partial x_0}\xi h + \frac{\partial\Delta y}{\partial y_0}\eta k + \frac{\partial\Delta y}{\partial z_0}\zeta l\right) + \beta_{\tau'}(\theta'_{\beta\tau'}\xi h + \theta''_{\beta\tau'}\eta k + \theta'''_{\beta\tau'}\zeta l),\\ D^2 z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta z}{\partial x_0}\xi h + \frac{\partial\Delta z}{\partial y_0}\eta k + \frac{\partial\Delta z}{\partial z_0}\zeta l\right) + \gamma_{\tau'}(\theta'_{\gamma\sigma'}\xi h + \theta''_{\gamma\sigma'}\eta k + \theta'''_{\gamma\sigma'}\zeta l).\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de la relation (4) et substituant ces valeurs (19) et (20) dans (18), nous trouverons aisément

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{D^2 x}{r^{n+1}} - (n+1)\frac{Dx}{r^{n+3}} r\iota\cos(r\iota)\\ &\quad = \frac{1}{2}\left(\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}}\right)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\xi h\left[\frac{\alpha_{\tau'}}{r^{n+1}}\theta'_{\alpha\sigma'} - (n+1)\frac{\delta x}{r^{n+3}}(\alpha_{\sigma'}\delta x\theta'_{\alpha\sigma'} + \beta_{\sigma'}\delta y\theta'_{\beta\sigma'} + \gamma_{\sigma'}\delta z\theta'_{\gamma\sigma'})\right]\\ &\qquad + \frac{1}{2}\eta k\left[\frac{\alpha_{\tau'}}{r^{n+1}}\theta''_{\alpha\sigma'} - (n+1)\frac{\delta x}{r^{n+3}}(\alpha_{\sigma'}\delta x\theta''_{\alpha\sigma'} + \beta_{\sigma'}\delta y\theta''_{\beta\tau'} + \gamma_{\sigma'}\delta z\theta''_{\gamma\sigma'})\right]\\ &\qquad + \frac{1}{2}\zeta l\left[\frac{\alpha_{\tau'}}{r^{n+1}}\theta'''_{\alpha\sigma'} - (n+1)\frac{\delta x}{r^{n+3}}(\alpha_{\tau'}\delta x\theta'''_{\alpha\tau'} + \beta_{\sigma'}\delta y\theta'''_{\beta\tau'} + \gamma_{\sigma'}\delta z\theta'''_{\gamma\sigma'})\right];\end{aligned}\right.$$

soit, pour abréger,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{D^2 x}{r^{n+1}} - (n+1)\frac{Dx}{r^{n+3}} r\iota\cos(r\iota)\\ &\quad = \frac{1}{2}\left(\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\Omega_x.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs

$$\frac{D^2 y}{r^{n+1}} - (n+1)\frac{Dy}{r^{n+3}} r\iota\cos(r\iota),\quad \frac{D^2 z}{r^{n+1}} - (n+1)\frac{Dz}{r^{n+3}} r\iota\cos(r\iota),$$

qui entrent dans les autres équations (18), conduiraient à des résultats semblables, en sorte que, en les y substituant, on donnerait à ces équations la forme suivante :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{1}{2}\,S\,\Sigma \pm \mu_{n\tau}\mu_{n\sigma'}f_n\left(\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta x}{r^{n+1}} + \Omega_x\right),\\ m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{1}{2}\,S\,\Sigma \pm \mu_{n\tau}\mu_{n\sigma'}f_n\left(\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta y}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta y}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta y}{r^{n+1}} + \Omega_y\right)\\ m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{1}{2}\,S\,\Sigma \pm \mu_{n\tau}\mu_{n\sigma'}f_n\left(\xi h\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta z}{r^{n+1}} + \eta k\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta z}{r^{n+1}} + \zeta l\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta z}{r^{n+1}} + \Omega_z\right).\end{aligned}\right.$$

Or Ω_x, Ω_y, Ω_z ont des termes où les variables ξ, η, ζ ont des dimensions paires, et qui donneront par conséquent des valeurs appréciables à la somme totale ; on ne peut donc pas les négliger. Quant à l'autre partie des seconds membres, on trouve, en appliquant la formule (11) à la première équation (23),

$$\begin{aligned}
&\xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\delta x}{r^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\delta x}{r^{n+1}} + z l \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\delta x}{r^{n+1}} \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q'_1 \xi h + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q'_2 \xi h + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q'_3 \xi h \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q''_1 \eta k + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q''_2 \eta k + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q''_3 \eta h \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q'''_1 \zeta l + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q'''_2 \zeta l + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta x}{r^{n+1}} q'''_3 \zeta l \\
&\quad = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta x}{r^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta x}{r^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta x}{r^{n+1}}.
\end{aligned}$$

On obtiendra de même

$$\begin{aligned}
&\xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\delta y}{r^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\delta y}{r^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\delta y}{r^{n+1}} \\
&\quad = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta y}{r^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta y}{r^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta z}{r^{n+1}}, \\
&\xi h \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\delta z}{r^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\delta z}{r^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\delta z}{r^{n+1}} \\
&\quad = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta z}{r^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta z}{r^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta z}{r^{n+1}}.
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les trois équations (23), les multipliant ensuite dans chaque membre par $\frac{\rho}{m}$, puis y appliquant, comme au n° 1, la formule connue

$$u\,dv = d\,uv - v\,du,$$

et nous servant de l'équation (14) applicable ici, puisque Δx, Δy, Δz ont les mêmes valeurs qu'au n° 1, nous aurons transformé les équa-

tions (23) dans les formules suivantes :

$$\rho\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta x\, \delta x}{r^{n+1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta y\, \delta x}{r^{n+1}}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta z\, \delta x}{r^{n+1}} + \frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\Omega_x,$$

$$\rho\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta x\, \delta y}{r^{n+1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta y\, \delta y}{r^{n+1}}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta z\, \delta y}{r^{n+1}} + \frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\Omega_y,$$

$$\rho\left(Z - \frac{d^2 z}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta x\, \delta z}{r^{n+1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta y\, \delta z}{r^{n+1}}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\frac{\Delta z\, \delta z}{r^{n+1}} + \frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\Omega_z,$$

soit, en vertu des équations (24), (25) et (26) de la Section III, applicables à l'hypothèse que nous étudions,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) &= \frac{\partial E_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial E_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial E_{zx}}{\partial z} + \Psi_x, \\ \rho\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) &= \frac{\partial E_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{zy}}{\partial z} + \Psi_y, \\ \rho\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) &= \frac{\partial E_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial E_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial E_{zz}}{\partial z} + \Psi_z. \end{aligned}\right.$$

On a posé dans ces équations, pour abréger,

$$\Psi_u = \frac{1}{2}\rho S \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{m}\Omega_u, \quad (u = x, y, z).$$

Quand il n'y a pas de changement brusque dans les expressions à sommer, et c'est le cas des équations (24), on peut substituer la sommation infinitésimale à la sommation par quantités finies avec d'autant plus d'approximation que les variations de grandeur sont plus petites. Nous allons le faire pour les équations (24) relativement à une portion du milieu, de masse M, dont le centre de gravité a pour coordonnées x, y, z. Nous multiplions en conséquence les équations (24) par $dx\, dy\, dz$, et nous les intégrons entre les limites de cette portion. Chacun des trois premiers termes du second membre pourra être intégré une fois,

et nous mettrons son intégrale entre parenthèses pour indiquer qu'elle est prise entre les limites de la variable correspondante. Nous trouverons ainsi

$$(25)\quad\begin{cases} M\left(X-\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=\iint(E_{xx}dy\,dz)+\iint(E_{yx}dz\,dx)+\iint(E_{zx}dx\,dy)+\iiint\Psi_x dx\,dy\,dz,\\ M\left(Y-\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\iint(E_{xy}dy\,dz)+\iint(E_{yy}dz\,dx)+\iint(E_{zy}dx\,dy)+\iiint\Psi_y dx\,dy\,dz,\\ M\left(Z-\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)=\iint(E_{xz}dy\,dz)+\iint(E_{yz}dz\,dx)+\iint(E_{zz}dx\,dy)+\iiint\Psi_z dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Changeons actuellement de variables et rapportons les deux dernières coordonnées des intégrales précédentes à des lignes géodésiques u, v tracées sur la face terminale du corps et s'y coupant à angle droit; nous aurons, en dénotant par N la normale à la surface,

$$(26)\quad\begin{cases} dy\,dz=\cos(Nx)\,du\,dv,\\ dz\,dx=\cos(Ny)\,du\,dv,\\ dx\,dy=\cos(Nz)\,du\,dv; \end{cases}$$

de plus nous n'avons à conserver qu'une des valeurs des premières intégrales, du moment que nous étendons l'intégration à toute la surface; nous pourrons donc, moyennant ce changement de variables, donner aux équations (25) la forme suivante :

$$(27)\quad\begin{cases} M\left(X-\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=\iint[E_{xx}\cos(Nx)+E_{yx}\cos(Ny)+E_{zx}\cos(Nz)]du\,dv+\iiint\Psi_x dx\,dy\,dz,\\ M\left(Y-\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\iint[E_{xy}\cos(Nx)+E_{yy}\cos(Ny)+E_{zy}\cos(Nz)]du\,dv+\iiint\Psi_y dx\,dy\,dz,\\ M\left(Z-\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)=\iint[E_{xz}\cos(Nx)+E_{yz}\cos(Ny)+E_{zz}\cos(Nz)]du\,dv+\iiint\Psi_z dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Or il est facile de s'assurer que, avec notre hypothèse et nos notations, on a identiquement les relations suivantes :

$$(28)\quad\begin{cases} E_{xx}\cos(Nx)+E_{yx}\cos(Ny)+E_{zx}\cos(Nz)=E_{Nx},\\ E_{xy}\cos(Nx)+E_{yy}\cos(Ny)+E_{zy}\cos(Nz)=E_{Ny},\\ E_{xz}\cos(Nx)+E_{yz}\cos(Ny)+E_{zz}\cos(Nz)=E_{Nz}. \end{cases}$$

En effet, si l'on décompose E_N par rapport à trois nouveaux axes rectangulaires, savoir la normale N et les deux tangentes aux lignes géo-

désiques u, v, on aura, en vertu du principe de la composition des forces,

$$(29)\quad \begin{cases} E_{NN} = E_{Nx}\cos(Nx) + E_{Ny}\cos(Ny) + E_{Nz}\cos(Nz), \\ E_{Nu} = E_{Nx}\cos(xu) + E_{Ny}\cos(yu) + E_{Nz}\cos(zu), \\ E_{Nv} = E_{Nx}\cos(xv) + E_{Ny}\cos(yv) + E_{Nz}\cos(zv). \end{cases}$$

Remplaçons dans les seconds membres les composantes de E_N par leurs expressions (28) et dans celles-ci les composantes de E_x, E_y, E_z par leurs valeurs tirées des relations (24), (25) et (26) de la Section III; nous trouverons aisément

$$\begin{aligned} E_{NN} &= \tfrac{1}{2}\rho S^4[\Delta x\cos(Nx) + \Delta y\cos(Ny) + \Delta z\cos(Nz)] \\ &\qquad \times [\delta x\cos(Nx) + \delta y\cos(Ny) + \delta z\cos(Nz)]\frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{Nu} &= \tfrac{1}{2}\rho S^4[\Delta x\cos(xu) + \Delta y\cos(yu) + \Delta z\cos(zu)] \\ &\qquad \times [\delta x\cos(Nx) + \delta y\cos(Ny) + \delta z\cos(Nz)]\frac{\mathcal{A}}{m}, \\ E_{Nv} &= \tfrac{1}{2}\rho S^4[\Delta x\cos(xv) + \Delta y\cos(yv) + \Delta z\cos(zv)] \\ &\qquad \times [\delta x\cos(Nx) + \delta y\cos(Ny) + \delta z\cos(Nz)]\frac{\mathcal{A}}{m}; \end{aligned}$$

soit, avec nos notations,

$$E_{NN} = \tfrac{1}{2}\rho S^4\,\Delta N\,\delta N\frac{\mathcal{A}}{m},$$

$$E_{Nu} = \tfrac{1}{2}\rho S^4\,\Delta u\,\delta N\frac{\mathcal{A}}{m},$$

$$E_{Nv} = \tfrac{1}{2}\rho S^4\,\Delta v\,\delta N\frac{\mathcal{A}}{m},$$

ce qu'aurait donné précisément l'application des formules (24) de la Section III au plan N. Il suit de cette vérification que les équations (28) sont exactes. Mais dès lors les équations (27) peuvent être mises sous la forme

$$(30)\quad \begin{cases} M\left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \int\int E_{Nx}\,du\,dv + \int\int\int \Psi_x\,dx\,dy\,dz, \\ M\left(Y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \int\int E_{Ny}\,du\,dv + \int\int\int \Psi_y\,dx\,dy\,dz, \\ M\left(Z - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \int\int E_{Nz}\,du\,dv + \int\int\int \Psi_z\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Or, d'après le n° **12**, I, de la Section IV, les seconds membres doivent se réduire à leurs premiers termes, et il est facile de s'assurer qu'ici les seconds termes ne sont pas nuls; donc l'hypothèse qui a conduit aux équations (30) est fausse; en d'autres termes, *les distances atomiques ne varient pas d'une manière insensible d'une molécule à l'autre; elles ne varient pas du tout ou varient d'une manière sensible.*

5. II. *Les positions des atomes varient par degrés sensibles.* — Les formules à employer pour développer les équations (18) sont alors celles qui portent les n°s (16) et (18) dans la Section III, en sorte que nous aurons, en conservant les notations adoptées dans cette Section,

$$(31)\qquad Dx = \delta x + \lambda_{\alpha\sigma},\quad Dy = \delta y + \lambda_{\beta\sigma},\quad Dz = \delta z + \lambda_{\gamma\sigma};$$

$$(32)\quad \begin{cases} D^2 x = \frac{1}{2}\xi h \dfrac{\partial(\delta x + \lambda_{\alpha\sigma'})}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\eta k \dfrac{\partial(\delta x + \lambda_{\alpha\sigma'})}{\partial y_0} + \frac{1}{2}\zeta l \dfrac{\partial(\delta x + \lambda_{\alpha\sigma'})}{\partial z_0}, \\ D^2 y = \frac{1}{2}\xi h \dfrac{\partial(\delta y + \lambda_{\beta\sigma'})}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\eta k \dfrac{\partial(\delta y + \lambda_{\beta\sigma'})}{\partial y_0} + \frac{1}{2}\zeta l \dfrac{\partial(\delta y + \lambda_{\beta\sigma'})}{\partial z_0}, \\ D^2 z = \frac{1}{2}\xi h \dfrac{\partial(\delta z + \lambda_{\gamma\sigma'})}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\eta k \dfrac{\partial(\delta z + \lambda_{\gamma\sigma})}{\partial y_0} + \frac{1}{2}\zeta l \dfrac{\partial(\delta z + \lambda_{\gamma\sigma'})}{\partial z_0}. \end{cases}$$

Les calculs subséquents sont les mêmes qu'au n° **4**, avec cette différence qu'on ne trouve plus de terme Ω et que les équations (24) sont remplacées par les suivantes :

$$(33)\quad \begin{cases} \rho\left(X - \dfrac{d^2 x}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zx}}{\partial z}, \\ \rho\left(Y - \dfrac{d^2 y}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zy}}{\partial z}, \\ \rho\left(Z - \dfrac{d^2 z}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zz}}{\partial z}. \end{cases}$$

En multipliant par $dx\,dy\,dz$ et intégrant comme au n° **4**, on eût trouvé

$$(34)\quad \begin{cases} M\left(X - \dfrac{d^2 x}{dt^2}\right) = \int\int [E_{xx}\cos(Nx) + E_{yx}\cos(Ny) + E_{zx}\cos(Nz)]\, du\, dv, \\ M\left(Y - \dfrac{d^2 y}{dt^2}\right) = \int\int [E_{xy}\cos(Nx) + E_{yy}\cos(Ny) + E_{zy}\cos(Nz)]\, du\, dv, \\ M\left(Z - \dfrac{d^2 z}{dt^2}\right) = \int\int [E_{xz}\cos(Nx) + E_{yz}\cos(Ny) + E_{zz}\cos(Nz)]\, du\, dv. \end{cases}$$

Ces équations sont, sous la réserve des relations (28), complètement d'accord avec les conclusions du n° 12, Section IV; et comme il est d'ailleurs évident que la position des atomes varie dans les molécules, il faut en conclure que *les positions des atomes varient par degrés sensibles d'une molécule à l'autre;* ce qui tranche la difficulté levée au n° 6 de la Section IV. Ce résultat, d'une certaine importance, est mis en lumière par le calcul direct; il eût échappé complètement avec la méthode de Navier (*voyez* ci-dessus le n° 2).

Nous avons vérifié les équations (28) dans le numéro précédent; nous pouvons encore le faire de la manière suivante.

Remontons aux n°s 6 et 7 de la Section III, et ne voyons dans δx, δy, δz que les projections de la distance de deux atomes, quelle que soit la loi de variation des distances atomiques; les formules (24) de la Section III sont alors une expression abrégée des formules (27) de la même Section, et nous la tiendrons pour telle dans ce qui va suivre.

Rapportons les fonctions de distances à sommer dans l'évaluation des forces élastiques sur le plan N à trois axes rectangulaires qui seront la normale N et les tangentes aux courbes géodésiques u et v, comme axes respectifs des x', y', z'. Alors les composantes de la force élastique E_N par rapport aux axes de x', y', z' seront, formules (24), Section III,

$$E_{x'x'} = \tfrac{1}{2}\rho\, S^{\flat}\, \Delta x'\, \delta x' \frac{\mathcal{A}}{m},$$

$$E_{x'y'} = \tfrac{1}{2}\rho\, S^{\flat}\, \Delta x'\, \delta y' \frac{\mathcal{A}}{m},$$

$$E_{x'z'} = \tfrac{1}{2}\rho\, S^{\flat}\, \Delta x'\, \delta z' \frac{\mathcal{A}}{m}.$$

On en déduit immédiatement, par les formules de la composition des forces,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} E_{x'x} &= \tfrac{1}{2}\rho\, S^{\flat}\, \Delta x' [\delta x' \cos(x'x) + \delta y' \cos(y'x) + \delta z' \cos(z'x)] \frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{x'y} &= \tfrac{1}{2}\rho\, S^{\flat}\, \Delta x' [\delta x' \cos(x'y) + \delta y' \cos(y'y) + \delta z' \cos(z'y)] \frac{\mathcal{A}}{m},\\ E_{x'z} &= \tfrac{1}{2}\rho\, S^{\flat}\, \Delta x' [\delta x' \cos(x'z) + \delta y' \cos(y'z) + \delta z' \cos(z'z)] \frac{\mathcal{A}}{m};\end{aligned}\right.$$



mais

$$\Delta x' = \Delta x \cos(x'x) + \Delta y \cos(x'y) + \Delta z \cos(x'z),$$
$$\delta x' \cos(x'x) + \delta y' \cos(y'x) + \delta z' \cos(z'x) = \delta x,$$
$$\delta x' \cos(x'y) + \delta y' \cos(y'y) + \delta z' \cos(z'y) = \delta y,$$
$$\delta x' \cos(x'z) + \delta y' \cos(y'z) + \delta z' \cos(z'z) = \delta z;$$

donc les équations (35) deviennent, en recourant aux équations (24), (25) et (26) de la Section III,

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} E_{x'x} &= E_{xx} \cos(x'x) + E_{yx} \cos(x'y) + E_{zx} \cos(x'z), \\ E_{x'y} &= E_{xy} \cos(x'x) + E_{yy} \cos(x'y) + E_{zy} \cos(x'z), \\ E_{x'z} &= E_{xz} \cos(x'x) + E_{yz} \cos(x'y) + E_{zz} \cos(x'z); \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, en y remplaçant x' par N, les équations (28).

6. Les calculs des n°s 4 et 5 donnent lieu aux remarques suivantes :

I. Ainsi que nous l'avons observé à la fin du n° 4, on arriverait également aux formules (36), en supposant les atomes homologues occupant respectivement au même instant t, quant à la distance du centre de la molécule et à l'orientation, les mêmes places dans les molécules dont les actions concourent effectivement à former la force élastique, ou, ce qui revient au même, en supposant nulles les quantités θ et λ des formules (20) et (31); alors les équations admises au commencement du n° 3, savoir

$$(37) \qquad \mathrm{S}\, \mathrm{D}x\, \Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma} \mu_{n\sigma'} f_n}{r^{n+1}} = 0, \quad \ldots,$$

se vérifieraient identiquement, attendu qu'elles auraient leurs premiers membres composés de termes égaux deux à deux et de signes contraires; en outre, comme nous ne pouvons pas supposer que, d'une face d'un parallélépipède générateur à la face opposée, la force élastique ait varié d'une quantité finie, parce que cela est contraire au principe de continuité admis dans tout ce qui précède, force nous est d'accepter les résultats de l'équilibre entre les moments des forces élastiques appliquées à un parallélépipède rectangle, tels que les donne

Lamé [1], et de poser

$$(38) \qquad E_{xy} = E_{yx}, \quad E_{yz} = E_{zy}, \quad E_{zx} = E_{xz}.$$

Ces dernières équations ne se vérifient pas identiquement, ainsi que nous l'avons vu aux nos 6 et 7 de la Section III. Elles représenteront par conséquent trois équations de condition entre les distances atomiques et les distances moléculaires. On sait que Lagrange a constaté, pour les équations différentielles à plusieurs variables, trois sortes d'intégrales : la complète, la singulière et la générale. Cette dernière comporte, pour chaque fonction et à chaque intégration, une fonction arbitraire et peut seule satisfaire à toutes les conditions requises par un problème général, tel que le représentent les formules (33). Ces formules sont d'ailleurs du second ordre et contiennent trois fonctions :

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0), \quad y = f_2(x_0, y_0, z_0), \quad z = f_3(x_0, y_0, z_0);$$

leurs premières intégrales générales comporteront donc trois fonctions arbitraires que les équations (38), également du premier ordre, serviront à déterminer. Une nouvelle intégration donnera des relations finies comprenant trois fonctions arbitraires nouvelles à déterminer par les conditions particulières de chaque problème particulier.

II. Nous avons supposé évident au n° 5 que les équations (37) étaient satisfaites; cela est effectivement une conséquence du principe de la continuité, mais ne ressort pas de la forme même des premières équations (37), où les termes ne sont plus égaux deux à deux et de signes contraires; par conséquent, dans le cas où les positions des atomes différeraient dans des rapports finis d'une molécule à l'autre, ce qui est possible, mais non nécessaire, les équations (37) constitueraient pour chaque atome trois équations de condition du premier ordre répondant aux trois équations différentielles du second ordre, données dans la Section IV et désignées par la lettre $\theta_i^{(j)}$. On peut les considérer

[1] *Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, par Lamé; Paris, Bachelier, 1852. (*Voyez* les pages 16 et 17, où cette égalité est établie par la considération des moments du parallélépipède rectangle.)



alors comme trois intégrales destinées à déterminer les trois fonctions arbitraires introduites par une première intégration des fonctions $\theta_i^{(j)}$. D'autre part, les équations (38) subsisteraient toujours et répondraient aux trois fonctions arbitraires introduites par l'intégration des fonctions $q_i^{(j)}$.

7. Avançons encore et considérons un cas particulier du fait plus général envisagé aux n°s 7 et suivants de la Section II. Supposons un ensemble de groupes de molécules dérivant rationnellement d'un système primitif en équilibre, tel qu'il a été défini au n° 13 de la Section I, et où il y aurait en mélange seulement deux corps différents, les parcelles de chacun d'eux alternant sur chaque rangée d'un système de rangées conjuguées. Les centres de gravité des parcelles de même nature formeront, en première approximation, un assemblage régulier dans le corps dérivé, au moins lorsqu'on y envisage un très petit espace; mais rien ne dit que les parcelles de nature différente appartiendront, dans ce très petit espace, à ce seul et même assemblage; le contraire même est le plus probable. Elles doivent cependant appartenir à un assemblage parallèle au premier et de mêmes paramètres, car, d'une part, les constantes qui entrent dans les équations d'équilibre et de mouvement sont différentes de grandeur, et, d'autre part, les assemblages ne doivent pas se couper de manière à superposer les parcelles. C'est sous le bénéfice de ces observations que nous allons chercher les approximations des équations (20) de la Section IV. Nous commencerons par distinguer dans les seconds membres les masses de même nature que celles du premier membre de celles de nature différente. Comme aux n°s 7 et 8 de la Section II, nous le ferons au moyen d'indices A et B. Alors les équations (20) de la Section IV donneront, pour les parcelles A,

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{As}\left(X-\frac{d^2 x_{As}}{dt^2}\right) &= S^3(x_{As's'\sigma'}-x_{Ass\sigma})\mathcal{A}+S^3(x_{Bs's'\sigma'}-x_{Ass\sigma})\mathcal{B},\\
\mathfrak{M}_{As}\left(Y-\frac{d^2 y_{As}}{dt^2}\right) &= S^3(y_{As's'\sigma'}-y_{Ass\sigma})\mathcal{A}+S^3(y_{Bs's'\sigma'}-y_{Ass\sigma})\mathcal{B},\\
\mathfrak{M}_{As}\left(Z-\frac{d^2 z_{As}}{dt^2}\right) &= S^3(z_{As's'\sigma'}-z_{Ass\tau})\mathcal{A}+S^3(z_{Bs's'\sigma'}-z_{Ass\sigma})\mathcal{B}.
\end{aligned}\right.$$

et, pour les parcelles B,

$$(40)\quad \begin{cases} \mathcal{M}_{\mathrm{B}s}\left(\mathrm{X}-\dfrac{d^2 x_{\mathrm{B}s}}{dt^2}\right)=\mathrm{S}^5(x_{\mathrm{B}s's'\sigma'}-x_{\mathrm{B}ss\sigma})\mathcal{C}+\mathrm{S}^5(x_{\mathrm{A}s's'\sigma'}-x_{\mathrm{B}ss\sigma})\mathcal{D},\\ \mathcal{M}_{\mathrm{B}s}\left(\mathrm{Y}-\dfrac{d^2 y_{\mathrm{B}s}}{dt^2}\right)=\mathrm{S}^5(y_{\mathrm{B}s's'\sigma'}-y_{\mathrm{B}ss\sigma})\mathcal{C}+\mathrm{S}^5(y_{\mathrm{A}s's'\sigma'}-y_{\mathrm{B}ss\sigma})\mathcal{D},\\ \mathcal{M}_{\mathrm{B}s}\left(\mathrm{Z}-\dfrac{d^2 z_{\mathrm{B}s}}{dt^2}\right)=\mathrm{S}^5(z_{\mathrm{B}s's'\sigma'}-z_{\mathrm{B}ss\sigma})\mathcal{C}+\mathrm{S}^5(z_{\mathrm{A}s's'\sigma'}-z_{\mathrm{B}ss\sigma})\mathcal{D}. \end{cases}$$

Nous avons employé dans ces équations, pour abréger, les abréviations analogues à celles du n° 8, Section III, savoir :

$$(41)\quad \begin{cases} \mathcal{A}=\Sigma\,\dfrac{\pm\,\mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}s's'\sigma'}\,f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{A}ss\sigma\mathrm{A}s's'\sigma'}},\\ \mathcal{B}=\Sigma\,\dfrac{\pm\,\mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}s's'\sigma'}\,f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{A}ss\sigma\mathrm{B}s's'\sigma'}},\\ \mathcal{C}=\Sigma\,\dfrac{\pm\,\mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}s's'\sigma'}\,f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{B}ss\sigma\mathrm{B}s's'\sigma'}},\\ \mathcal{D}=\Sigma\,\dfrac{\pm\,\mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}s's'\sigma'}\,f_n}{r^{n+1}_{\mathrm{A}ss\sigma\mathrm{A}s's'\sigma'}}. \end{cases}$$

Nous considérons un milieu où les parcelles oscillent en restant toujours dans le voisinage les unes des autres; alors deux parcelles consécutives, nécessairement différentes d'après la supposition admise ci-dessus, peuvent être admises comme formant un groupe; et, en partant de là, on pourra grouper deux à deux toutes les parcelles du mélange. Appliquons les équations (39) et (40) aux deux parcelles du même groupe, et posons

$$(42)\quad \begin{cases} \mathcal{M}_{\mathrm{A}s}+\mathcal{M}_{\mathrm{B}s}=\mathfrak{M},\\ \mathcal{M}_{\mathrm{A}s}x_{\mathrm{A}s}+\mathcal{M}_{\mathrm{B}s}x_{\mathrm{B}s}=\mathfrak{M}\mathfrak{X},\\ \mathcal{M}_{\mathrm{A}s}y_{\mathrm{A}s}+\mathcal{M}_{\mathrm{B}s}y_{\mathrm{B}s}=\mathfrak{M}\mathfrak{Y},\\ \mathcal{M}_{\mathrm{A}s}z_{\mathrm{A}s}+\mathcal{M}_{\mathrm{B}s}z_{\mathrm{B}s}=\mathfrak{M}\mathfrak{Z}. \end{cases}$$

Les sommes des équations (39) et (40), ajoutées respectivement entre elles, auront pour premiers membres

$$(43)\quad \mathfrak{M}\left(\mathrm{X}-\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}\right),\quad \mathfrak{M}\left(\mathrm{Y}-\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}\right),\quad \mathfrak{M}\left(\mathrm{Z}-\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right);$$

il s'agit de déterminer les valeurs approximatives des seconds. Or, si l'on désigne par u l'une quelconque des variables x, y, z, on voit que les seconds membres contiennent les quatre sortes de différences suivantes :

$$u_{As's'\sigma'} - u_{As s\sigma}, \quad u_{Bs's'\sigma'} - u_{As s\sigma},$$
$$u_{Bs's'\sigma'} - u_{Bs s\sigma}, \quad u_{As's'\sigma'} - u_{Bs s\sigma},$$

que nous désignerons par les nos 1, 2 pour la première ligne et 3, 4 pour la seconde, en sorte que, si nous posons d'une manière générale, en négligeant les quantités d'ordre inférieur au second,

$$(44)\quad \begin{cases} u_{As's'\sigma'} - u_{As s\sigma} = Du_1 + D^2 u_1, \\ u_{Bs's'\sigma'} - u_{As s\sigma} = Du_2 + D^2 u_2, \\ u_{Bs's'\sigma'} - u_{Bs s\sigma} = Du_3 + D^2 u_3, \\ u_{As's'\sigma'} - u_{Bs s\sigma} = Du_4 + D^2 u_4, \end{cases}$$

nous trouverons, en répétant les calculs du n° 1, que la valeur d'un quelconque des seconds membres des équations formées par l'addition des équations (39) et (40) sera

$$(45)\quad \begin{cases} S^5 \Sigma \pm \mu_{nAs s\sigma} \mu_{nAs's'\sigma'} f_n \left[\dfrac{D^2 u_1}{r_1^{n+1}} - (n+1) \dfrac{Du_1}{r_1^{n+3}} r_1 \mathfrak{r}_1 \cos(r_1 \mathfrak{r}_1) \right] \\ + S^5 \Sigma \pm \mu_{nAs s\sigma} \mu_{nBs's'\sigma'} f_n \left[\dfrac{D^2 u_2}{r_2^{n+1}} - (n+1) \dfrac{Du_2}{r_2^{n+3}} r_2 \mathfrak{r}_2 \cos(r_2 \mathfrak{r}_2) \right] \\ + S^5 \Sigma \pm \mu_{nBs s\sigma} \mu_{nBs's'\sigma'} f_n \left[\dfrac{D^2 u_3}{r_3^{n+1}} - (n+1) \dfrac{Du_3}{r_3^{n+3}} r_3 \mathfrak{r}_3 \cos(r_3 \mathfrak{r}_3) \right] \\ + S^5 \Sigma \pm \mu_{nBs s\sigma} \mu_{nAs's'\sigma'} f_n \left[\dfrac{D^2 u_4}{r_4^{n+1}} - (n+1) \dfrac{Du_4}{r_4^{n+1}} r_4 \mathfrak{r}_4 \cos(r_4 \mathfrak{r}_4) \right] \end{cases} \text{(1)}.$$

Il s'agit actuellement d'exprimer les Du, $D^2 u$.

Nous remontons, comme nous l'avons déjà fait, à l'état fictif antérieur, et, sans nous arrêter à la décomposition des coordonnées $x_{As s\sigma}$, $y_{As s\sigma}$, $z_{As s\sigma}$, $x_{Bs s\sigma}$, ... en $x_{As} + a_{As s} + \alpha_{As s\sigma}$, $y_{Bs} + b_{Bs s} + \beta_{Bs s\sigma}$, ..., sachant que chacun de ces termes est du premier ordre (à l'exception de x_{As},

---

(1) Nous n'avons pas mis d'accent à l'indice s des molécules; il n'a en effet aucune signification, puisque nous supposons identique la composition des parcelles A, et que nous en faisons autant pour les parcelles B. La nature de l'atome ne peut donc varier qu'avec son numéro de molécule dans la parcelle et son numéro d'atome dans la molécule.

y_{As}, ..., qui sont des quantités finies), et varie par des quantités du premier ordre (n° 5); nous considérerons les coordonnées complètes comme fonctions des quantités correspondantes dans un état primitif, et notamment de coordonnées des centres de gravité des groupes de parcelles dans ledit état. Ces fonctions diffèrent d'ailleurs pour chaque atome. Nous poserons, d'une manière générale, en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées primitives du centre du groupe,

$$(46)\qquad \begin{cases} u_{As s\sigma} = f_i(x_0, y_0, z_0), \\ u_{Bs s\sigma} = \mathfrak{F}_i(x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Écrivons, pour abréger,

$$(47)\qquad \begin{cases} q'_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_0}, \quad q''_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial y_0}, \quad q'''_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial z_0}; \\ \mathfrak{Q}'_i = \dfrac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial x_0}, \quad \mathfrak{Q}''_i = \dfrac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial y_0}, \quad \mathfrak{Q}'''_i = \dfrac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial z_0}; \end{cases}$$

$$(48)\qquad \begin{cases} \Delta x_A = q'_1 \xi h + q''_1 \eta k + q'''_1 \zeta l, \\ \Delta y_A = q'_2 \xi h + q''_2 \eta k + q'''_2 \zeta l, \\ \Delta z_A = q'_3 \xi h + q''_3 \eta k + q'''_3 \zeta l; \end{cases}$$

$$(49)\qquad \begin{cases} \Delta x_B = \mathfrak{Q}'_1 \xi h + \mathfrak{Q}''_1 \eta k + \mathfrak{Q}'''_1 \zeta l, \\ \Delta y_B = \mathfrak{Q}'_2 \xi h + \mathfrak{Q}''_2 \eta k + \mathfrak{Q}'''_2 \zeta l, \\ \Delta z_B = \mathfrak{Q}'_3 \xi h + \mathfrak{Q}''_3 \eta k + \mathfrak{Q}'''_3 \zeta l. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, les Δx_A, Δy_A, Δz_A, Δx_B, ... varient suivant l'atome que l'on considère. Nous pouvons écrire, en recourant au théorème de Taylor et négligeant les quantités au-dessous du second ordre,

$$(50)\qquad \begin{cases} x_{As's'\sigma'} - x_{As s\sigma} = x_{As s'\sigma'} - x_{As s\sigma} + \Delta x_A + \frac{1}{2}\left(\xi h \dfrac{\partial \Delta x_A}{\partial x_0} + \eta k \dfrac{\partial \Delta x_A}{\partial y_0} + \zeta l \dfrac{\partial \Delta x_A}{\partial z_0}\right), \\ y_{As's'\sigma'} - y_{As s\sigma} = y_{As s'\sigma'} - y_{As s\sigma} + \Delta y_A + \frac{1}{2}\left(\xi h \dfrac{\partial \Delta y_A}{\partial x_0} + \eta k \dfrac{\partial \Delta y_A}{\partial y_0} + \zeta l \dfrac{\partial \Delta y_A}{\partial z_0}\right), \\ z_{As's'\sigma'} - z_{As s\sigma} = z_{As s'\sigma'} - z_{As s\sigma} + \Delta z_A + \frac{1}{2}\left(\xi h \dfrac{\partial \Delta z_A}{\partial x_0} + \eta k \dfrac{\partial \Delta z_A}{\partial y_0} + \zeta l \dfrac{\partial \Delta z_A}{\partial z_0}\right); \end{cases}$$

$$(51)\qquad \begin{cases} x_{Bs's'\sigma'} - x_{Bs s\sigma} = x_{Bs s'\sigma'} - x_{Bs s\sigma} + \Delta x_B + \frac{1}{2}\left(\xi h \dfrac{\partial \Delta x_B}{\partial x_0} + \eta k \dfrac{\partial \Delta x_B}{\partial y_0} + \zeta l \dfrac{\partial \Delta x_B}{\partial z_0}\right), \\ y_{Bs's'\sigma'} - y_{Bs s\sigma} = y_{Bs s'\sigma'} - y_{Bs s\sigma} + \Delta y_B + \frac{1}{2}\left(\xi h \dfrac{\partial \Delta y_B}{\partial x_0} + \eta k \dfrac{\partial \Delta y_B}{\partial y_0} + \zeta l \dfrac{\partial \Delta y_B}{\partial z_0}\right), \\ z_{Bs's'\sigma'} - z_{Bs s\sigma} = z_{Bs s'\sigma'} - z_{Bs s\sigma} + \Delta z_B + \frac{1}{2}\left(\xi h \dfrac{\partial \Delta z_B}{\partial x_0} + \eta k \dfrac{\partial \Delta z_B}{\partial y_0} + \zeta l \dfrac{\partial \Delta z_B}{\partial z_0}\right). \end{cases}$$

Ces valeurs nous permettent de donner les formes suivantes aux expressions (44) :

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned}
Du_1 &= u_{As s'\sigma'} - u_{As s\sigma} + \Delta u_A = \delta u_1,\\
D^2 u_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\xi h \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \delta u_1}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \delta u_1}{\partial z_0}\right);\\
Du_2 &= u_{Bs s'\sigma'} - u_{Bs s\sigma} + \Delta u_B = \delta u_2,\\
D^2 u_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\xi h \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \delta u_2}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \delta u_2}{\partial z_0}\right);\\
Du_3 &= u_{Bs s'\sigma'} - u_{Bs s\sigma} + \Delta u_B = \delta u_3,\\
D^2 u_3 &= \tfrac{1}{2}\left(\xi h \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \delta u_3}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \delta u_3}{\partial z_0}\right);\\
Du_4 &= u_{As s'\sigma'} - u_{Bs s\sigma} + \Delta u_A = \delta u_4,\\
D^2 u_4 &= \tfrac{1}{2}\left(\xi h \frac{\partial \delta u_4}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \delta u_4}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \delta u_4}{\partial z_0}\right).
\end{aligned}\right.$$

Comme les quantités $u_{As s'\sigma'}$, $u_{Bs s'\sigma'}$ appartiennent au groupe s et sont, par conséquent, des constantes relativement aux variables ξh, ηk, ζl, la substitution des valeurs (52) dans l'expression générale (45) permet de ramener celle-ci à la forme

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nAs s\sigma}\mu_{nAs s'\sigma'} f_n\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta u_1}{r_1^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta u_1}{r_1^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta u_1}{r_1^{n+1}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nAs s\sigma}\mu_{nBs s'\sigma'} f_n\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta u_2}{r_2^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta u_2}{r_2^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta u_2}{r_2^{n+1}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nBs s\sigma}\mu_{nBs s'\sigma'} f_n\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta u_3}{r_3^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta u_3}{r_3^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta u_3}{r_3^{n+1}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nBs s\sigma}\mu_{nAs s'\sigma'} f_n\left(\xi h \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta u_4}{r_4^{n+1}} + \eta k \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\delta u_4}{r_4^{n+1}} + \zeta l \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta u_4}{r_4^{n+1}}\right);
\end{aligned}$$

soit, en répétant les calculs du n° 1 sur les formules (11),

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nAs s\sigma}\mu_{nAs s'\sigma'} f_n\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta u_1}{r_1^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta u_1}{r_1^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta u_1}{r_1^{n+1}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nAs s\sigma}\mu_{nBs s'\sigma'} f_n\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta u_2}{r_2^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta u_2}{r_2^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta u_2}{r_2^{n+1}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nBs s\sigma}\mu_{nBs s'\sigma'} f_n\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta u_3}{r_3^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta u_3}{r_3^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta u_3}{r_3^{n+1}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}S^5 \pm \mu_{nBs s\sigma}\mu_{nAs s'\sigma'} f_n\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta u_4}{r_4^{n+1}} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta u_4}{r_4^{n+1}} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta u_4}{r_4^{n+1}}\right) = V.
\end{aligned}\right.$$

Dans cette équation, les δu sont ceux du n° 8 de la Section III; quant

aux Δu, ils sont donnés par les équations

$$
(54)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta x &= \xi h \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z_0},\\
\Delta y &= \xi h \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z_0},\\
\Delta z &= \xi h \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x_0} + \eta k \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y_0} + \zeta l \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z_0},
\end{aligned}
\right.
$$

et sont assujettis, par conséquent, à la relation (14). Multiplions par $\frac{\rho}{\mathfrak{M}}$ les deux membres de l'équation (53); appliquons au premier membre de cette équation la différentiation par partie représentée par la formule

$$u\,dv = d\,uv - v\,du;$$

nous trouverons, eu égard à la relation (14),

$$
(55)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{V}\rho}{\mathfrak{M}} = \;& \frac{\partial}{\partial x}\tfrac{1}{2}\rho\Big(\mathrm{S}_5\,\Delta x\,\delta u_1\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_1^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta x\,\delta u_2\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_2^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta x\,\delta u_3\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}ss\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_3^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta x\,\delta u_4\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_4^{n+1}}\Big)\\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\tfrac{1}{2}\rho\Big(\mathrm{S}^5\,\Delta y\,\delta u_1\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_1^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta y\,\delta u_2\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}ss\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_2^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta y\,\delta u_3\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_3^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta y\,\delta u_4\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_4^{n+1}}\Big)\\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\tfrac{1}{2}\rho\Big(\mathrm{S}_5\,\Delta z\,\delta u_1\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_1^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta z\,\delta u_2\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{A}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_2^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta z\,\delta u_3\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{B}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_2^{n+1}}\\
&\qquad + \mathrm{S}^5\,\Delta z\,\delta u_4\,\Sigma \pm \mu_{n\mathrm{B}ss\sigma}\,\mu_{n\mathrm{A}ss'\sigma'}\frac{f_n}{\mathfrak{M}\,r_4^{n+1}}\Big)\\
= \;& \frac{\partial \mathrm{E}_{xu}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_{yu}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_{zu}}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

ainsi qu'on le voit aisément en se reportant aux formules (51) de la Section III, où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ont précisément les valeurs désignées ici par les caractères Σ.

En substituant ces valeurs dans les équations (39) + (40) multipliées par $\frac{\rho}{\mathcal{M}}$, et tenant compte des valeurs (43) de leurs premiers membres, nous trouverons, pour leurs valeurs approximatives,

$$
(56)\quad
\begin{cases}
\rho\left(X - \dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zx}}{\partial z}, \\
\rho\left(Y - \dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zy}}{\partial z}, \\
\rho\left(Z - \dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right) = \dfrac{\partial E_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial E_{zz}}{\partial z},
\end{cases}
$$

c'est-à-dire les équations (33) du n° 5, qu'on peut s'assurer ainsi représenter d'une manière générale les équations d'équilibre et de mouvement d'un mélange de deux sortes de parcelles régulièrement et également distribuées ou pouvant être rattaché à un semblable système.

8. Les équations (56), ayant la même forme que les équations (33), conduisent comme elles aux relations (28) entre les composantes de la force élastique sur trois plans directeurs rectangulaires et celles de la force élastique sur un plan quelconque; il est inutile d'en répéter ici les calculs; mais on doit y appliquer toutes les déductions du n° 6. Les équations (37) et les équations (38) seront des équations de condition, comme pour les équations (33).

Enfin on peut supposer aussi bien que les parcelles A et B sont des parcelles matérielles, ou que l'une est une parcelle matérielle et l'autre une parcelle d'éther luminifère. Nous allons examiner ce dernier cas.

9. Remontons aux valeurs (51), Sect. III des forces élastiques sur le plan des x dans un mélange en nombre égal de parcelles matérielles A et de parcelles éthérées B; écrivons-les avec les notations qu'elles ont dans la Sect. III, nous aurons

$$
(57)\quad
\begin{cases}
E_{xx} = \frac{1}{2}\rho S^5 \Delta x \left(\delta x_1 \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} + \delta x_2 \dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}} + \delta x_3 \dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}} + \delta x_4 \dfrac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}}\right), \\
E_{xy} = \frac{1}{2}\rho S^5 \Delta x \left(\delta y_1 \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} + \delta y_2 \dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}} + \delta y_3 \dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}} + \delta x_4 \dfrac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}}\right), \\
E_{xz} = \frac{1}{2}\rho S^5 \Delta x \left(\delta z_1 \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} + \delta z_2 \dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}} + \delta z_3 \dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}} + \delta z_4 \dfrac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}}\right).
\end{cases}
$$



Désignons respectivement par A, B, O les centres de gravité des parcelles A, B et du groupe AB. Les trois points A, O, B sont sur une même droite généralement inclinée par rapport aux trois rangées conjuguées qui déterminent le centre O par leur intersection. La parcelle A a une masse du troisième ordre et la parcelle B une du quatrième : en conséquence, OB étant nécessairement une grandeur du premier ordre, OA l'est du second. Soit O′ le centre d'un groupe A, B, immédiatement voisin sur l'une des trois rangées conjuguées qui se coupent en O, et A′, B′ les centres de gravité de ses parcelles. Les trois points A′, O′, B′ sont en ligne droite, et la droite A′O′B′ peut faire un angle fini, quoique petit, avec AOB (n° **5**); elle peut en différer aussi en grandeur, d'une quantité du premier ordre. La distance BA′ doit être toujours plus grande que la distance AB; autrement la parcelle B formerait groupe avec A′ et non avec A. Mais des atomes de B peuvent s'approcher par moments très près de ceux de A′, à des distances beaucoup plus petites que la distance OO′ des centres de gravité. Il suffit de jeter un coup d'œil sur les valeurs des expressions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des seconds membres (57), comprenant les groupes de parcelles immédiatement consécutifs sur les rangées pour lesquelles OO′ se réduit à un paramètre, et l'on voit combien ces rapprochements font croître lesdites expressions, par suite les forces élastiques, sans que la valeur de ρ, laquelle dépend uniquement des paramètres et de leurs inclinaisons mutuelles, change en quoi que ce soit. On voit même, à cause de la décroissance excessivement rapide des actions avec la distance, que les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ doivent être toujours plus grandes que si la masse des atomes était concentrée au centre O. Il y a donc, pour une densité donnée, un minimum des valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, lequel croît avec les distances AO, BO.

Si les atomes homologues occupent tous au même instant une même position dans les groupes binaires, ces très grands rapprochements entre l'atome éthéré de B et l'atome matériel de A′ auront lieu tous à la fois en un même instant; les forces élastiques auront toutes à la fois leur plus grande valeur, comme elles auront leurs plus petites dans un autre instant excessivement rapproché du premier, puisque les révolutions de chaque atome éthéré s'accomplissent dans un temps immensément petit du second ordre (n° **11**, Section IV). Les seules forces

élastiques que nous puissions observer expérimentalement seront moyennes uniquement par rapport au temps.

Si, au contraire, les positions des atomes homologues dans les groupes consécutifs varient dans des proportions finies, ainsi qu'on l'a reconnu possible au n° 5 pour les molécules isolées et que le supposent les formules de la Section III employées dans le n° 7, les droites AOB, A'O'B' auront une différence d'inclinaison sensible, et les plus grands rapprochements des atomes ne sont pas simultanés. Mais les maxima en un point donné se produiront toujours à des intervalles immensément petits du second ordre, et il en sera de même des minima; le synchronisme de ces maxima et minima se retrouvera à une très petite distance du point considéré. L'expérience donnera donc des moyennes des forces élastiques, tant par rapport à l'espace que par rapport au temps.

Il y a lieu de faire ici une autre remarque. Plus les paramètres h, k, l, que nous supposons avoir été choisis les plus petits possibles dans l'assemblage des centres O, grandissent, plus augmente la prépondérance dans les seconds membres de (57), des termes contenant une seule fois un seul de ces paramètres, et surtout de ceux qui se rapportent aux atomes les plus excentriques. Si la densité est très faible, un petit nombre seulement de ces termes intervient et ce sont toujours les mêmes; la force élastique suit donc une marche régulière. Au contraire, si la densité augmente suffisamment, c'est-à-dire si h, k, l descendent au-dessous de certaines limites, les orbites restant les mêmes et surtout quand ils se resserrent, des termes qui donnaient auparavant des valeurs trop faibles en donnent de plus grandes et arrivent à être comparables aux autres. La marche des forces élastiques change donc et n'obéit plus aux lois qu'on avait pu déterminer par l'expérience dans le cas précédent.

Ce fait ne peut que s'accentuer avec la contraction des orbites et l'augmentation de la densité.

10. Ces conséquences physiques des formules obtenues nous mettent à même d'apprécier la nature des phénomènes produits par les mouvements des atomes éthérés. Représentons en effet, d'une manière générale, par E la force élastique normale à la surface terminale d'un corps

fluide renfermé dans un vase inextensible terminé à la partie supérieure par un tube cylindrique indéfini vertical de diamètre $2R$ et supposons que, par un moyen quelconque, on y ait rendu la force élastique E constante. Nous aurons, d'une manière générale, et en représentant par P le facteur de ρ dans le second membre des équations (57),

$$E = \rho P, \tag{58}$$

P croissant et ρ par conséquent décroissant à mesure que l'agitation des atomes éthérés augmente. Soit encore V le volume du contenu de la partie inférieure du vase, et soit h_0 la hauteur à laquelle le corps fluide, supposé uniforme dans toute son étendue, est monté dans le tube pour une valeur particulière P_0 de P, et la valeur correspondante ρ_0 de ρ. La masse du corps sera égale à

$$\rho_0(V + \pi R^2 h_0).$$

Pour d'autres valeurs ρ_1, P_1 et h_1, elle sera encore

$$\rho_1(V + \pi R^2 h_1);$$

d'où

$$\rho_0(V + \pi R^2 h_0) = \rho_1(V + \pi R^2 h_1); \tag{59}$$

mais on a, en vertu de (58) et de la constance de E,

$$\rho_0 P_0 = \rho_1 P_1; \tag{60}$$

donc

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{V + \pi R^2 h_1}{V + \pi R^2 h_0}$$

et

$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\pi R^2}{V + \pi R^2 h^0}(h_1 - h_0). \tag{61}$$

On pourra donc, en graduant le tube, mesurer les accroissements de $P_1 - P_0$.

Or l'instrument que nous venons de décrire est bien connu en Physique; c'est le thermomètre où l'on a rendu E constant, en lui substituant la pression atmosphérique, s'il s'agit d'un thermomètre à air, ou la tension sensiblement constante d'un ménisque dans le vide quand

il s'agit d'un thermomètre à alcool ou à mercure. L'accroissement de P est donc précisément l'accroissement de la chaleur : donc la grandeur des mouvements de l'éther est corrélative du phénomène que nous appelons *chaleur;* mais ces mouvements ne sont pas les seuls phénomènes correspondant à la chaleur, ainsi que nous le montrera une étude plus approfondie.

Il reste à expliquer comment un thermomètre peut donner la température d'un milieu dans lequel il est plongé et qui a généralement une composition interne et des forces élastiques différentes. A défaut de la loi de transmission des mouvements par contact que nous n'avons pas encore trouvée, nous nous rappellerons qu'on mesure la température seulement quand l'équilibre de température s'est établi entre le thermomètre et le milieu. Cela revient à supposer que le mouvement moyen des parcelles éthérées est le même dans le thermomètre et le milieu; car s'il n'en était pas ainsi, il tendrait à se mettre en équilibre, et celui-ci n'existerait pas encore. Il en est de même du mouvement des parcelles matérielles. Or les équations (34), combinées avec les équations (28), donnent dans le thermomètre

$$M\left(X - \frac{d^2X}{dt^2}\right) = \int\int E_{Nx}\, du\, dv,$$

$$M\left(Y - \frac{d^2Y}{dt^2}\right) = \int\int E_{Ny}\, du\, dv,$$

$$M\left(Z - \frac{d^2Z}{dt^2}\right) = \int\int E_{Nz}\, du\, dv$$

et dans le milieu adjacent, pour un même volume suffisant pour obtenir la moyenne,

$$M'\left(X - \frac{d^2X'}{dt^2}\right) = \int\int E'_{Nx}\, du\, dv,$$

$$M'\left(Y - \frac{d^2Y'}{dt^2}\right) = \int\int E'_{Ny}\, du\, dv,$$

$$M'\left(Z - \frac{d^2Z'}{dt^2}\right) = \int\int E'_{Nz}\, du\, dv;$$

on en tire, à cause de

$$\frac{d^2X'}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2}, \quad \frac{d^2Y'}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2}, \quad \frac{d^2Z'}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dt^2}$$

et de l'égalité des limites d'intégration

$$\frac{E'_{N.x}}{M'} = \frac{E_{N.x}}{M}, \quad \frac{E'_{N.y}}{M'} = \frac{E_{N.y}}{M}, \quad \frac{E'_{N.z}}{M'} = \frac{E_{N.z}}{M};$$

d'où, en remplaçant M et M' par leurs valeurs respectives $V\rho$, $V\rho'$ et $E_{N.u}$, $E'_{N.u}$ par ρP_u, $\rho' P'_u$, formes équivalentes de (57) (ρ, ρ' étant les densités moyennes), on obtient

$$(62) \qquad P'_x = P_x, \quad P'_y = P_y, \quad P'_z = P_z.$$

L'indication du thermomètre conviendra donc au milieu aussi bien qu'à lui; et cependant les densités, ainsi que les forces élastiques du thermomètre et du milieu, pourront être très différentes.

11. Continuons l'étude de ces fonctions P.

Les seconds membres (45) ne sont pas seulement fonctions de x_0, y_0, z_0; ils le sont aussi du temps t, et il en est de même de leurs dérivées; donc les quantités Δu, δu ne sont pas constantes par rapport au temps pour un même groupe d'atomes; elles varient en grandeur avec le temps t. Il en est, par suite, de même des seconds membres de (57), et il en résulte une nouvelle difficulté pour l'intégration et sommation de ces quantités. Il existe cependant une supposition très simple, qui permet d'en tirer une intégrale et est applicable d'une manière plus ou moins approchée à certains cas naturels : c'est celle d'une oscillation rectiligne de tous les centres O de groupes (*voir* le n° 9), parallèlement à une direction donnée. Nous rapporterons alors les centres de gravité à un système d'axes rectangulaires, tel que l'axe des x, y soit parallèle à la direction donnée et nous négligerons les effets de la pesanteur. La force élastique variera dans le sens de l'oscillation, et non perpendiculairement à celle-ci; les variations des composantes tangentielles sont nulles et la première (56) se réduit à

$$(63) \qquad -\rho \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{\partial E_{xx}}{\partial x},$$

tandis que les deux autres se réduisent identiquement à o, puisque $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{z}$ ne varient pas.

Multiplions les deux membres de (63) par $\frac{dx}{dt}\,dt$, et intégrons depuis

$t = t_0$, instant où le centre au début de sa course a une vitesse nulle, jusqu'à l'instant $t = t_0 + \tau$ où le centre a sa plus grande vitesse u; changeons en outre le signe de E_{xx}, ce qui revient à supposer qu'on prend la force répulsive avec le signe $+$ et qu'ici nous considérons la force maximum; nous aurons

$$E_{xx} - E_0 = \frac{1}{2}\rho\frac{dX^2}{dt^2}, \tag{64}$$

E_0 étant la répulsion correspondant au temps t_0, et en appelant E la force élastique moyenne, qui est répulsive et égale à $\frac{E_{xx} + E_0}{2}$, il vient

$$E = E_0 + \frac{1}{4}\rho\frac{dX^2}{dt^2}. \tag{65}$$

Pour arriver à cette équation, nous nous sommes départis de notre rigueur de raisonnement; notre déduction n'en a pas moins une certaine valeur, en ce sens qu'elle montre une certaine dépendance entre les forces élastiques et les forces vives, dépendance sur laquelle insistent les géomètres les plus distingués qui se sont occupés de Thermodynamique. Il est même extrêmement curieux que, partant de principes entièrement différents, ils arrivent à une formule à peu près semblable à l'équation (65), quoique, toutefois, les vitesses envisagées ne soient pas absolument les mêmes. A ce point de vue, il est utile de rapprocher ce qui précède des Mémoires XIV et XV de Clausius [1], consacrés à l'explication de la force élastique par les chocs des molécules, à l'évaluation des vitesses et des chemins moyens parcourus par ces molécules.

Cette équation (65) entraîne encore une autre conclusion : c'est qu'il y a des faits concomitants avec la révolution des atomes éthérés : révolution des atomes matériels, révolution ou oscillation des centres de gravité A et B, oscillation du centre O; tous sont solidaires et concourent à la grandeur de P, seule chose que mesure réellement le thermomètre; nous ne pouvons pas dire si c'est l'ensemble de ces phénomènes,

---

[1] *Théorie mécanique de la Chaleur,* par R. Clausius, traduite de l'allemand par F. Folie. 2e Partie, Paris, Eugène Lacroix, 1869, p. 185 et suiv.

ou seulement un ou plusieurs d'entre eux, qui produit en nous la sensation physiologique de chaleur.

A la rigueur, on pourrait expliquer les mêmes résultats avec deux parcelles matérielles A et B; mais le nombre de très grands rapprochements serait immensément plus petit, et les oscillations des valeurs des forces élastiques seraient beaucoup plus grandes.

12. Les formules obtenues dans la Section IV sont très générales, par cela même vagues et sujettes à des interprétations erronées, pour peu que l'on commette la moindre inadvertance. On ne saurait donc trop les étudier au moyen des approximations, aussi bien au point de vue du mouvement des atomes, laissé jusqu'ici de côté, qu'à celui du mouvement des centres de gravité de molécules étudiés dans les numéros précédents. Prenons, en conséquence, les équations (17) de la Section IV et appliquons-les, pour plus de simplicité, à un corps pur à molécules polyatomiques isolées. Les équations (17) deviennent alors, en y supprimant l'indice s, remplaçant $u_{s\sigma}$ par

$$u_s + v_{s\sigma} (u_s + v_{s\sigma} = x_s + \alpha_{s\sigma},\ y_s + \beta_{s\sigma},\ z_s + \gamma_{s\sigma}),$$

et y séparant dans le second membre les actions relatives aux atomes de la molécule s,

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
\mu_\sigma\left(X - \frac{d^2 x_s}{dt^2} - \frac{d^2 \alpha_{s\sigma}}{dt^2}\right) &= S(\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\,\Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r_{s\sigma s\sigma'}^{n+1}} + S(x_{s'} + \alpha_{s'\sigma'} - x_s - \alpha_{s\sigma})\,\mathcal{A},\\
\mu_\sigma\left(Y - \frac{d^2 y_s}{dt^2} - \frac{d^2 \beta_{s\sigma}}{dt^2}\right) &= S(\beta_{\sigma'} - \beta_\sigma)\,\Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r_{s\sigma s\sigma'}^{n+1}} + S(y_{s'} + \beta_{s'\sigma'} - y_s - \beta_{s\sigma})\,\mathcal{A},\\
\mu_\sigma\left(Z - \frac{d^2 z_s}{dt^2} - \frac{d^2 \gamma_{s\sigma}}{dt^2}\right) &= S(\gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma)\,\Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r_{s\sigma s\sigma'}^{n+1}} + S(z_{s'} + \gamma_{s'\sigma'} - z_s - \gamma_{s\sigma})\,\mathcal{A}.
\end{aligned}\right.$$

Employons, pour les approximations des seconds termes des seconds membres, seuls capables de valeurs approchées, les mêmes caractères qu'au n° 5; nous trouverons

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned}
&S(u_{s'} + v_{s'\sigma'} - u_s - v_{s\sigma})\,\Sigma \frac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r_{s\sigma s'\sigma'}^{n+1}}\\
&\quad = S\Sigma \pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n \left[\frac{Du}{r^{n+1}} + \frac{D^2 u}{r^{n+1}} - (n+1)\frac{Du(Dx\,D^2x + Dy\,D^2y + Dz\,D^2z)}{r^{n+3}}\right].
\end{aligned}\right.$$



Il est facile de s'assurer que, dans ce développement,

$$S\Sigma \pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n \frac{Du}{r^{n+1}}$$

n'est pas nul, car il n'y a pas de symétrie, et qu'il est d'ordre ε^2; pareille chose a lieu pour les premiers termes des seconds membres de (66). Or, comme X, Y, Z, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont des quantités finies, ainsi qu'il résulte des numéros précédents, il faut admettre que $\frac{d^2\alpha_\sigma}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta_\sigma}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma_\sigma}{dt^2}$ sont des quantités immensément grandes du premier ordre et que les trois équations (66) se dédoublent en six autres que voici (on y a supprimé l'indice s, qui n'a plus de raison d'être, et écrit r' à la place de $r_{s\sigma s\sigma'}$) :

$$(68)\quad \begin{cases} -\mu_\sigma \dfrac{d^2\alpha_\sigma}{dt^2} = S(\alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma)\,\Sigma \dfrac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r'^{n+1}} + S\Sigma \pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n \dfrac{Dx}{r^{n+1}}, \\ -\mu_\sigma \dfrac{d^2\beta_\sigma}{dt^2} = S(\beta_{\sigma'} - \beta_\sigma)\,\Sigma \dfrac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r'^{n+1}} + S\Sigma \pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n \dfrac{Dy}{r^{n+1}}, \\ -\mu_\sigma \dfrac{d^2\gamma_\sigma}{dt^2} = S(\gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma)\,\Sigma \dfrac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{r'^{n+1}} + S\Sigma \pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n \dfrac{Dz}{r^{n+1}} \end{cases}$$

et

$$(69)\quad \begin{cases} X - \dfrac{d^2x}{dt^2} = S\Sigma \dfrac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{\mu_\sigma}\left[\dfrac{D^2x}{r^{n+1}} - (n+1)\dfrac{Dx(Dx\,D^2x + Dy\,D^2y + Dz\,D^2z)}{r^{n+3}}\right], \\ Y - \dfrac{d^2y}{dt^2} = S\Sigma \dfrac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{\mu_\sigma}\left[\dfrac{D^2y}{r^{n+1}} - (n+1)\dfrac{Dy(Dx\,D^2x + Dy\,D^2y + Dz\,D^2z)}{r^{n+3}}\right], \\ Z - \dfrac{d^2z}{dt^2} = S\Sigma \dfrac{\pm \mu_{n\sigma}\mu_{n\sigma'} f_n}{\mu_\sigma}\left[\dfrac{D^2z}{r^{n-1}} - (n+1)\dfrac{Dz(Dx\,D^2x + Dy\,D^2y + Dz\,D^2z)}{r^{n+3}}\right]. \end{cases}$$

On ne peut récuser la réalité des équations (69) en disant que, leurs termes multipliés par μ_σ étant immensément petits par rapport à ceux des équations (68), les équations (66) sont satisfaites dès que les relations (68) le sont, puisque les autres parties sont négligeables. En effet, 1° les développements (67) contiennent toutes les quantités du second et du troisième ordre; 2° de plus, dès qu'on ajoute entre elles toutes les relations (66) que peuvent fournir les divers atomes de la molécule s, on trouve en première approximation précisément les équations que donnerait l'addition de toutes les équations (69). Donc l'ad-

dition des équations (66) n'introduit aucune quantité du troisième ordre qui ne soit déjà dans les équations (69).

La coexistence des équations (68) et (69) donne lieu aux conséquences suivantes :

I. Le mouvement des atomes dans la molécule ne dépend que très faiblement des variations des distances moléculaires dans un milieu assujetti à des lois continues. On peut le calculer à part avec une assez grande approximation en prenant pour Dx, Dy, Dz des valeurs moyennes et supposant que les quantités $\alpha_{\sigma'} - \alpha_{\sigma}$, $\beta_{\sigma'} - \beta_{\sigma}$, $\gamma_{\sigma'} - \gamma_{\sigma}$ sont les mêmes au même instant dans tout le rayon d'activité moléculaire. Les vitesses seront des quantités finies, ainsi que nous l'avons déjà reconnu au n° 9 de la Section IV.

II. Les équations (69) ne peuvent pas contredire les équations (36) du n° 5. Elles doivent donc se confondre avec elles. Cela peut se faire identiquement, par exemple dans les corps purs à molécules isolées, composées de deux atomes identiques et ayant au même instant la même distance et la même orientation dans toute l'étendue du milieu. Il est évident en effet qu'alors chacun des deux atomes σ, σ' donnera des équations (69) où les quantités sommées dans le second membre seront les mêmes, moitié par conséquent de celles que fournira la molécule; d'autre part, $\mu_{\sigma} = \mu_{\sigma'} = \frac{1}{2}m$; donc les deux atomes donneront des équations (69) identiques entre elles et identiques aux équations (36), puisqu'il suffira de remplacer dans les premières μ_{σ} par $\frac{1}{2}m$ pour retomber sur les autres. Dans le cas où les équations (69) ne se confondent pas identiquement avec les équations (36), elles fournissent, par leur identification, des équations de condition d'autant plus nombreuses que la molécule contient plus d'atomes; si elle en contient trois, par exemple, il faudra, non seulement que les trois équations (69) coïncident avec (36); mais qu'il en soit encore de même pour les équations (69) correspondant aux groupes de deux atomes, et ainsi de suite. Le nombre possible d'équations de condition croît donc très rapidement avec le nombre d'atomes de la molécule, et, par conséquent, l'existence de molécules à nombreux atomes devient de plus en plus difficile.

13. J'avais espéré, pendant un certain temps, pouvoir adjoindre à ce

travail une sixième Section, dans laquelle j'aurais traité la propagation du mouvement à l'intérieur des corps. Malgré mes précautions de commencer toujours par les problèmes les plus faciles, je me suis heurté au dernier moment contre des difficultés que je n'avais pas soupçonnées d'abord, et, pour ne pas retarder indéfiniment la publication de cet Ouvrage, j'ai renoncé à mon projet. Je me bornerai à consigner ici les principaux résultats que j'ai entrevus.

Si l'on nomme *mouvement envahisseur* le mouvement qui tend à se substituer à l'autre, qui sera le *mouvement envahi*, et si l'on désigne les portions du corps où règnent ces mouvements par les épithètes qui les caractérisent, on peut poser les deux principes suivants :

I. Le milieu envahi est séparé du milieu envahisseur par une couche très mince où les vitesses varient d'une quantité finie d'une molécule à l'autre dans le sens de la propagation du mouvement; on peut appeler cette couche *couche de raccord*.

II. La surface moyenne de la couche de raccord est normale en chacun de ses points à la résultante qu'y donneraient les vitesses envahissante et envahie.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

16

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

9009 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

